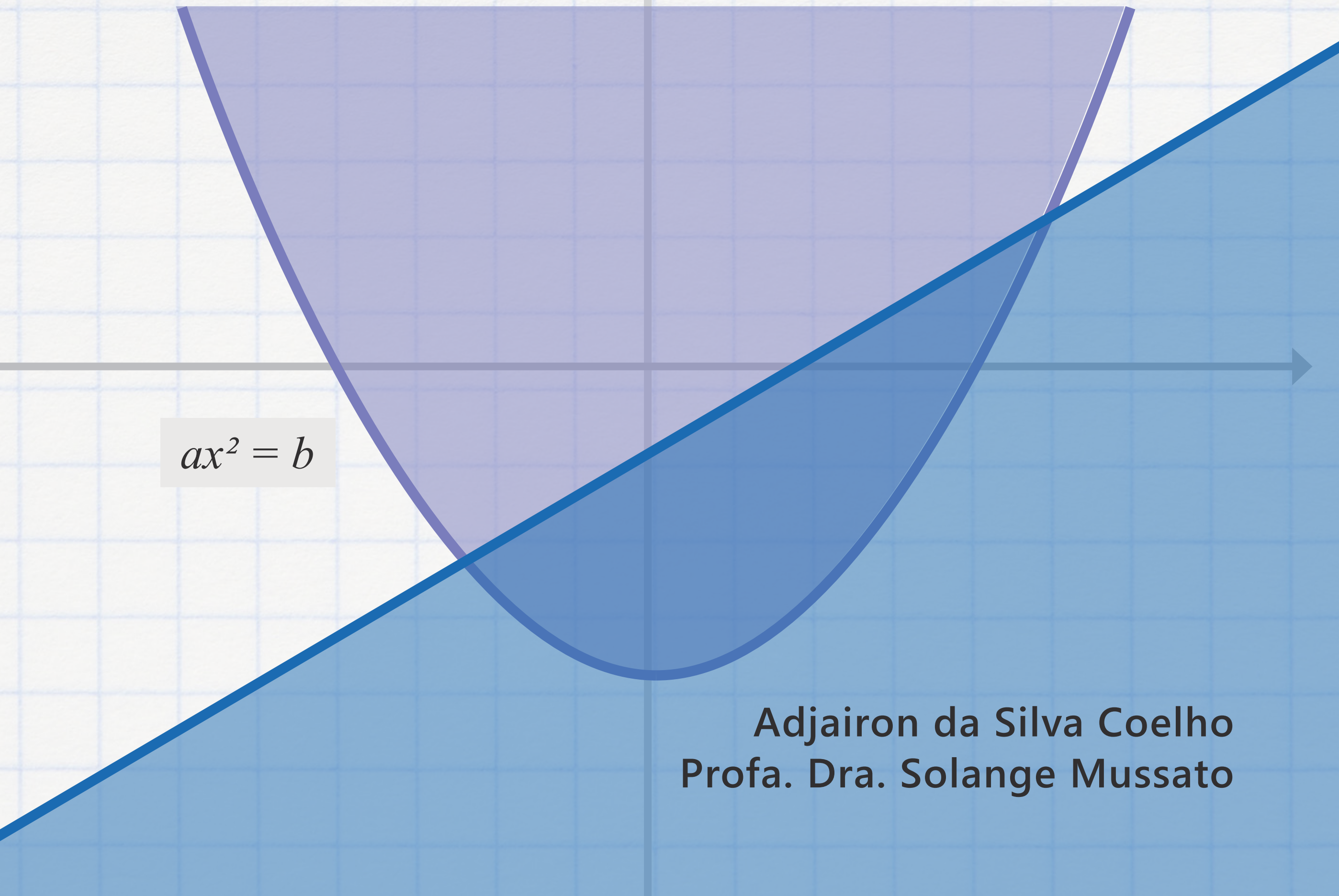
Tarefas Para o Ensino de Equações Polinomiais de Segundo Grau com o Software GeoGebra Classic 6:

Uma Alternativa para o Desenvolvimento de Habilidades em Estudantes do 8º ano

Produto Educacional



Adjairon da Silva Coelho

Profa. Dra. Solange Mussato

Tarefas Para o Ensino de Equações Polinomiais de Segundo Grau com o Software GeoGebra Classic 6:

Uma Alternativa para o Desenvolvimento de Habilidades em Estudantes do 8º ano

Produto Educacional

Adjairon da Silva Coelho

Profa. Dra. Solange Mussato

Boa Vista-RR

2022

FICHA TÉCNICA

Autor
Adjairon da Silva Coelho - adjaironrr@hotmail.com

Orientadora
Profa. Dra. Solange Mussato - solangemussato1@yahoo.com.br

Título
Produto Educacional que acompanha a Dissertação: Tarefas para o Ensino de Equações Polinomiais de Segundo Grau com o Software GeoGebra: Uma Alternativa para o Desenvolvimento de Habilidades em Estudantes do 8º ano, apresentados ao Mestrado Profissional em Ensino de Ciências da Universidade Estadual de Roraima – UERR, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências, tendo como linha de pesquisa: Métodos pedagógicos e tecnologias digitais no ensino de ciências sob a orientação da Profa. Dra. Solange Mussato.

Colaboradores
Profa. Dra. Solange Mussato/ Universidade Estadual de Roraima – UERR
Prof. Dr. Vinícius Pazuch/ Universidade Federal do ABC – UFABC
Prof. Dr. Hector José Garcia Mendonza/ Universidade Federal de Roraima – UFRR
Universidade Estadual de Roraima – UERR - https://www.uerr.edu.br/
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências – PPGEC/UERR
https:// www.uerr.edu.br/ppgec/

Capa e diagramação
Jonas Pantoja Diniz - jonas.diniz@hotmail.com

Imagens e adaptação de ilustração
Freepik.com

Universidade Estadual de Roraima – UERR
Coordenação do Sistema de Bibliotecas
Multiteca Central
Rua Sete de Setembro, 231 Bloco – F Bairro Canarinho
CEP: 69.306-530 Boa Vista - RR
Telefone: (95) 2121.0946
E-mail: biblioteca@uerr.edu.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C672t Coelho, Adjairon da Silva.
Tarefas para o ensino de equações polinomiais de segundo grau com o software geogebra classic 6: uma alternativa para o desenvolvimento de habilidades em estudantes do 8º ano. / Adjairon da Silva Coelho. – Boa Vista (RR) : UERR, 2021.
91 f. : il. Color.

Orientadora: Profa. Dra. Solange Mussato.

Produto Educacional (Mestrado) – Universidade Estadual de Roraima (UERR), Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências (PPGE).

1. Álgebra 2. Ensino Problematizador 3. Equação Polinomial 4. GeoGebra I. Mussato, Solange (orient.) II. Universidade Estadual de Roraima – UERR III. Título

UERR. Dis.Mes.Ens.Cie.2021 CDD – 512

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária
Letícia Pacheco Silva – CRB 11/1135 – RR

Sobre os autores

Adjairon da Silva Coelho

Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/0488136253215176

Mestre em Ensino de Ciências pela Universidade Estadual de Roraima - UERR, Especialização em Educação Profissional e Tecnológica pela Faculdade São Luís, Especialização em Ensino de Matemática e em Tópicos em Matemática pela Faculdade FAVENI. Graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Roraima - UFRR. Atua como Professor Efetivo da Educação Básica da Carreira do Magistério Público Estadual, Professor Auxiliar I no Centro Universitário Estácio da Amazônia no Departamento de Engenharias e como Professor Substituto do Magistério Superior, classe A - Auxiliar no Departamento de Matemática da UFRR. Foi presidente do Centro Acadêmico de Matemática - CAMAT da UFRR, bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação a Docência - PIBID, Professor do Pré-vestibular Solidário - Solivest na UFRR. Foi bolsista pela CAPES atuando como tutor EaD no curso de Licenciatura em Matemática pela UFRR/Nead. Atualmente realiza pesquisas e estudos sobre o Ensino de Matemática com Tecnologias Digitais, principalmente com o software GeoGebra.

Profa. Dra. Solange Mussato

Currículo Lattes: http://lattes.cnpq.br/4522114741755237

Possui Doutorado e Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Luterana do Brasil. É especialista em Educação Matemática, também pela UFMS. Professora licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS. Atua como coordenadora da matemática na Secretaria de Educação do Estado de Roraima e, como professora permanente no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências da Universidade Estadual de Roraima.

Sumário

Introdução.........9

1 Unidade

1 Atividade de Situações Problema em Matemática.........10

2 Unidade

1 Particularidades das Equações Polinomiais do 2º Grau.........13

3 Unidade

1 Competências e Habilidades em Matemática preconizadas pela BNCC.........18

4 Unidade

1 GeoGebra.........23
2 Janelas do GeoGebra.........26
3 Janela de Álgebra.........26
4 Janela de Visualização.........35
5 Janela CAS.........35
6 Janela de Visualização 3D.........36
7 Teclado Alfanumérico.........44
8 Barra de seleção direta de Janelas.........46
9 Barra de Menu.........50

5 Unidade

1 Tarefas propostas com auxílio do GeoGebra.....51
2 Primeira Sequência de Tarefas.....52
3 Segunda Sequência de Tarefas.....60
4 Terceira Sequência de Tarefas.....67
5 Quarta Sequência de Tarefas.....70
6 Quinta Sequência de Tarefas.....75

6 Unidade

1 Tarefas no GeoGebra.....83
2 Sequência Didática.....84

Considerações.....89

Referências.....90

Apresentação

Caro professor (a),

O Produto Educacional aqui apresentado está composto por uma Sequência Didática, Tarefas sugeridas envolvendo álgebra, aritmética e geometria e um Tutorial resumido do software GeoGebra desenvolvido no percurso de uma pesquisa no âmbito do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências da Universidade Estadual de Roraima (UERR), intitulada "Tarefas para o Ensino de Equações Polinomiais de Segundo Grau com o Software GeoGebra: Uma Alternativa para o Desenvolvimento de Habilidades em Estudantes do 8º ano".

Essa pesquisa foi desenvolvida objetivando possibilitar um processo de ensino Da álgebra por meio da resolução de problemas com auxílio do software GeoGebra. Assim investigamos o desenvolvimento da habilidade "Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo - EF08MA09" preconizada na BNCC (BRASIL, 2018, p. 312-313).

O Produto Educacional "Tarefas para o ensino de equações polinomiais de segundo grau com o software GeoGebra Classic 6: uma alternativa para o desenvolvimento de habilidades em estudantes do 8º ano", apresenta uma sequência de tarefas, com o uso dos recursos do software GeoGebra. São tarefas pensadas e sequenciadas para promover o ensino por meio da dinamicidade e interatividade proporcionada pelo uso da Tecnologia Digital.

Trata-se de uma SD desenvolvida especialmente para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental e para professores que se propõem a buscar novas formas de ensinar conceitos algébricos. A escolha do software GeoGebra se deu em função da interação entre suas janelas e pelo fácil manuseio e visualização dos objetos construídos, além de ser um software livre e de fácil instalação.

Acreditamos que este Produto Educacional se tornará um diferencial para os professores dos anos finais do Ensino Fundamental que ensinam matemática e que necessitam de tarefas e ferramentas que os auxiliem no ensino com tecnologias. E tem como objetivo geral possibilitar aos alunos do 8º ano a resolução de problemas algébricos utilizando o software GeoGebra como aporte tecnológico a fim de potencializar o desenvolvimento de habilidade em álgebra. Para tanto, faz-se necessário que os alunos tenham acesso as tecnologias digitais de qualidade, como laboratórios com computadores atualizados e com acesso à internet.

Adjairon da Silva Coelho

Introdução

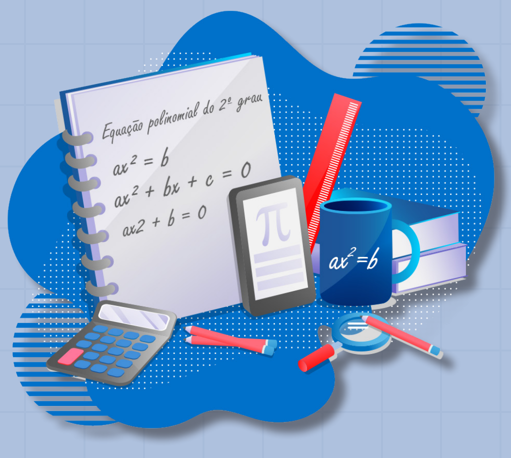
Este Produto Educacional foi elaborado com o intuito de aproximar tanto os estudantes quanto os professores do ensino e aprendizagem da matemática por meio das tecnologias. E, por consequência, os estudantes desenvolvem as habilidades em álgebra e, os professores competências com relação ao GeoGebra.

Considera-se que é de suma importância que os professores de matemática, em plena era digital, conheçam e utilizem as tecnologias voltadas ao ensino e desenvolvimento de habilidades. Não somente para ensinar álgebra, mas todos os objetos de conhecimento possíveis.

Portanto, o professor que estiver disposto a fazer a mudança nas suas aulas, tem o dever de utilizar tais ferramentas para melhorar o aprendizado de seus alunos. Podendo, então, fazer uso deste Produto Educacional em suas aulas de álgebra ou, a partir dele, elaborar um material que possa auxiliá-lo em outros objetos de conhecimento.

Unidade 1

Atividade Situação Problema em Matemática



1 Atividade de Situações Problema em Matemática

A atividade referida na pesquisa diz respeito ao conceito desenvolvido por Leóntiev e, posteriormente, assumido por Galperin, e está definida como sendo um sistema de ações, em que cada ação é composta por um sistema de operações para se alcançar um objetivo. “A atividade é movida pelo motivo (material ou ideal), as ações pelo objetivo e as operações se originam pelas condições da atividade, mas o motivo pode influenciar nas ações para alcançar o objetivo” (MENDOZA; TINTORER, 2017, p. 12). E, os autores ainda descrevem que:

> As habilidades são o produto da sistematização das ações por parte do sujeito de forma consciente em condições tais que permitam um constante desenvolvimento e os hábitos constituem a assimilação dos aspectos estruturais da atividade que são as operações. Ou seja, as habilidades são ações sistemáticas não automatizadas, enquanto os hábitos são operações sistemáticas automatizadas. O surgimento dos hábitos tem como base as habilidades, mas necessariamente não todas as habilidades se convertem em hábitos. (MENDOZA; TINTORER, 2017, p. 12).

Mendoza e Tintorer (2017, p. 13) colocam que a Atividade de Situações Problema em Matemática (ASPM) foi desenvolvida com objetivo de resolver situações problema em situações de ensino e aprendizagem com interação da tríade professor, estudante e situação problema. Permitindo a utilização da resolução de problema (Polya, 1975) como metodologia de ensino, tecnologias (digitais ou não) e outros recursos didáticos que facilitem a assimilação.

A ASPM é formada por quatro ações (Compreender o problema, construir o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução), cada uma com suas respectivas operações, permitindo solucionar uma variedade de problemas matemáticos. Conforme Mendoza e Tintorer (2017, p. 13), as quatro etapas estão definidas como:

Compreender o problema: suas operações sinteticamente se resumem em ler o problema e extrair elementos conhecidos e desconhecidos; analisar os dados e condições e definir os objetivos do problema.

Construir o modelo matemático: suas operações necessariamente determinar as variáveis e/ou incógnitas; indicar todas variáveis e incógnitas; estabelecer as unidades de medidas, caso houver; formar um modelo matemático (fórmula ou algoritmo) considerando variáveis, incógnitas e condições do problema e analisar as unidades de medidas que envolvem o problema.

Solucionar o modelo matemático: consiste em selecionar um ou mais métodos para resolver o modelo matemático; selecionar uma tecnologia digital, por exemplo, o GeoGebra, contendo todos os recursos necessários para resolver o modelo e, por fim, solucionar o modelo matemático.

Interpretar a solução: é a última, porém, a mais importante com relação ao desenvolvimento de habilidades, pois consiste em interpretar o resultado; extrair os resultados significativos; rebater ou não os objetivos do problema; refletir sobre os objetivos do problema; analisar novos dados e condições que possibilitam a reformulação e construção de um novo modelo matemático, solucioná-lo e interpretá-lo.

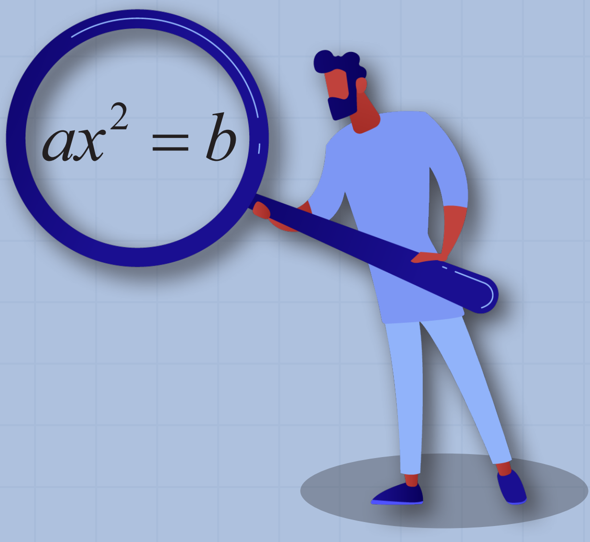
Portanto, a ASPM e o GeoGebra tornam-se essenciais à pesquisa, pois, pela ASPM, em suas quatro ações. Da mesma forma, o GeoGebra por ser considerado um software construcionista, oferecendo aos estudantes a manipulação e execução de uma variedade de comandos, que podem ser feitos e refeitos (ações e operações), o que faz com que o estudante reflita sobre o que acontece durante e ao final do processo, desenvolvendo habilidades, tanto no conteúdo matemático quanto na tecnologia digital. Ainda com relação a ASPM, Mendoza e Tintorer (2017, p. 13) complementam expondo que:

> A Atividade de Situações Problema (ASPM) em Matemática está orientada pelo objetivo de resolver situações problema na zona de desenvolvimento proximal num contexto de ensino aprendizagem onde existe uma interação entre o professor, o estudante e a situação problema, utilizando a resolução de problema em Matemática como metodologia de ensino, a tecnologia disponível e outros recursos didáticos, para transitar pelos diferentes estados do processo de assimilação.

A partir da ASPM foram construídas as atividades de situações problema em equações polinomiais do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, objeto de conhecimento da temática álgebra, preconizadas na BNCC (BRASIL, 2018) para o 8º ano do Ensino Fundamental.

Unidade 2

Particularidades das Equações Polinomiais do 2° Grau



1 Particularidades das Equações Polinomiais do 2º Grau

Uma equação polinomial de grau n é denotada por $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, em que, $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ são coeficientes e x a raíz da equação polinomial sempre que $P(x) = 0$, onde $P(x)$ é um polinômio de grau n com coeficientes reais $(\mathbb{R})$.

Por exemplo:

Dada a equação $3x - 12 = 0$; em que, $P(x) = 3x - 12$ e tem coeficientes $a_1 = 3$ e $a_0 = -12$, e , portanto, é uma equação polinomial de grau 1, ou do primeiro grau. A equação $x^2 - 3x + 7 = 0$; em que, $P(x) = x^2 - 3x + 7$ e tem coeficientes $a_2 = 1, a_1 = -3$ e $a_0 = 7$, portanto, é uma equação polinomial de grau 2, ou do segundo grau. E, a equação $x^3 - 2x^2 + 12x + 31 = 0$; em que, $P(x) = x^2 - 2x^2 + 12x + 31$ e tem coeficientes $a_3 = 1, a_2 = -2, a_1 = 12$ e $a_0 = 31$, portanto, é uma equação polinomial de grau 3.

Nas equações, os valores (raízes) que tornam a equação polinomial verdadeira, no caso em que $P(x) = 0$, são representados pela letra x, ou seja, a letra x representa um ou mais números desconhecidos, dependendo do grau da equação, chamados incógnitas ou raízes. A pesquisa tem como objeto de estudo as equações polinomiais do 2º grau. Portanto, vale destacar que por definição: Toda equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é chamada equação do 2º grau, em que e são chamados coeficientes x e incógnita (DANTE, 2018, p. 89).

Os coeficientes b e c de um polinômio de grau podem ser nulos (zero) e, neste caso, o polinômio é denominado equação do segundo grau incompleta. Assim, por exemplo, a equação polinomial do 2º grau $3x^2 - 12 = 0$ é denominada incompleta, pois $b = 0$ e, a equação $x^2 - 4x = 0$ também é denominada equação incompleta, pois $c = 0$.

Como o objetivo é que os estudantes alcancem a habilidade em "equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$," em que, nesse caso, deve ser um número maior que (zero) ou . Esse tipo de equação é conhecido também como equação incompleta do 2º grau e, pela definição $ax^2 + bx + c = 0$, a equação pode ser escrita como $ax^2 + b = 0$, com a $a \neq 0$ e um número real.

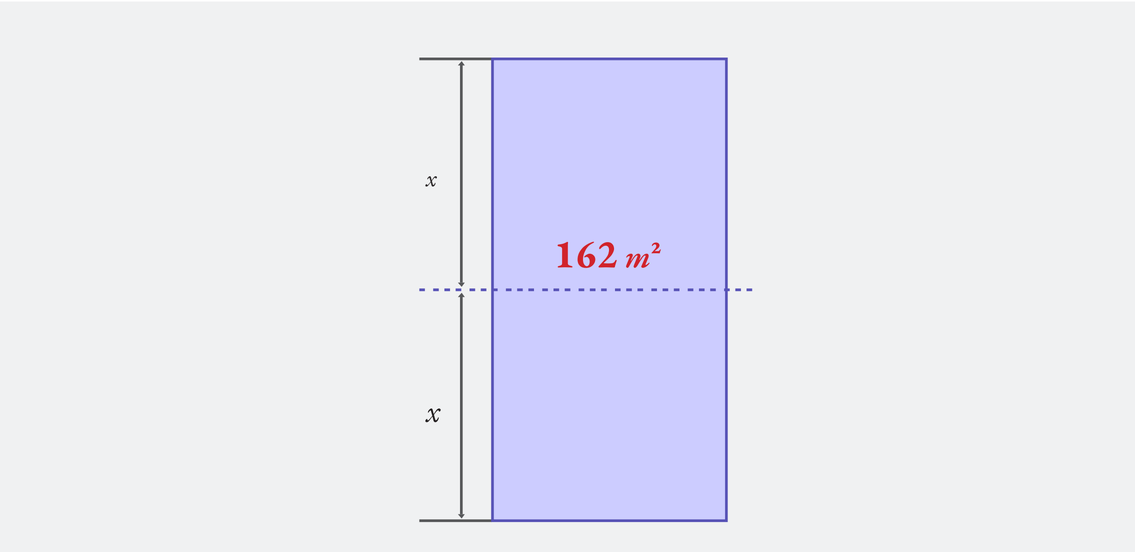
Para construir um modelo matemático de uma situação problema que permite o reconhecimento de uma equação polinomial do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, é importante que os estudantes tenham assimilado as definições.

Desse modo, dado o exemplo: **Um terreno em forma retangular será dividido em dois terrenos quadrados iguais. Se a área do terreno é de , qual será**

a medida do lado de cada terreno quadrado? É viável que possa ser resolvido rapidamente por meio de conceitos geométricos. Porém, utilizando uma incógnita, poderemos obter sua resolução algebricamente.

O estudante, para obter a solução, deve ter as habilidades básicas para resolver problemas como: ler e interpretar, construir ou utilizar um modelo matemático (fórmulas), resolver o modelo e por fim, interpretá-lo. A Figura 1 a seguir ilustra a situação.

Figura 1: Terreno em forma retangular



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Para resolvermos este problema é conveniente que se use as etapas da resolução de problemas de Polya (1975): compreender o problema, construir o modelo matemático, resolver o modelo matemático e verificar o resultado. Assim, após a leitura e compreensão do problema será possível a construção de um modelo matemático. Em seguida, basta observar as seguintes particularidades do problema: A medida do lado de cada quadrado é x , a área de cada região quadrada é x^2 e a área do terreno retangular $162\ \mathrm{m}^2$.

Sendo assim, como dispomos de duas regiões com área da região quadrada igual a x^2, então teremos como modelo matemático a igualdade: $2\mathrm{x}^2 = 162\mathrm{m}^2$. Agora, como resolver essa equação e encontrar sua solução? A solução é o valor da incógnita x, comumente chamada de raiz da equação e, no caso em que o grau é 2, a equação terá duas raízes.

No entanto, como resolver esta equação polinomial do 2º grau $2\mathrm{x}^2 = 162$ e encontrar seus valores numéricos, as raízes. Assim, um número real será uma raiz para a equação polinomial do tipo $\mathrm{ax}^2 = \mathrm{b}$ logo, com o modelo matemático estabelecido, basta solucionar o problema, logo:

$$2 \cdot x^2 = 162 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{162}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 81$$

Portanto, há duas raízes, podendo ser $x = 9$ ou $x = -9$. Contudo, a medida do lado de cada terreno será de 9 metros, pois trata-se de uma unidade comprimento, em que, medida será sempre positiva e, pode-se verificar que $9^2 = 81$.

Ao generalizar o modelo matemático da equação incompleta $ax^2 = b$ para encontrar as raízes, teremos que:

$$ax^2 = b \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}} \qquad (1)$$

O que resultará nas soluções com valores reais: $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ ou $x - \sqrt{\frac{b}{a}}$ sempre que a fração $\frac{b}{a}$ seja positivo.

Vejamos, agora, como encontrar as raízes da equação do 2º grau incompleta $4x^2 - 100 = 0$,seguindo os passos da generalização em (1). Logo:

$$4x^2 - 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{100}{4}$$

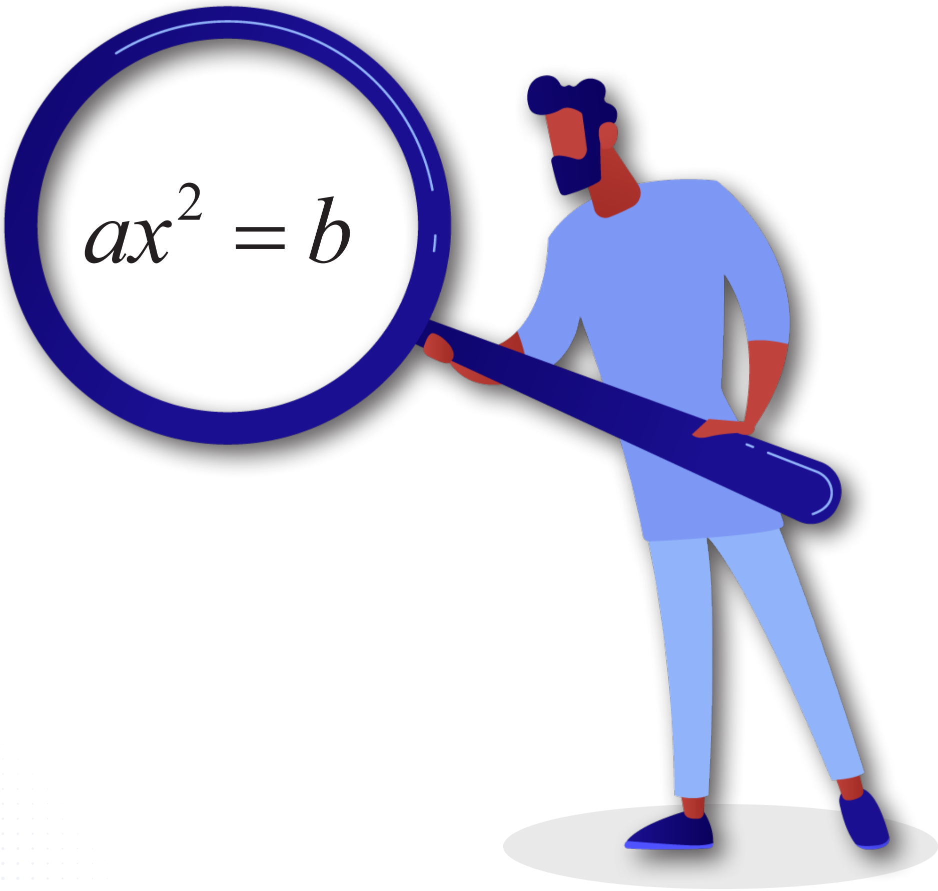
Portanto, $x = \sqrt{\frac{100}{4}} = \frac{10}{2} = 5$ ou $x = -\sqrt{\frac{100}{4}} = -\frac{10}{2} - 5$ Em que, utilizamos a propriedade da radiciação: $\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$. E, também, como podemos observar, a fração $\frac{100}{4}$ resulta em 25, dessa forma, poderíamos resolver a equação, mais rapidamente, da seguinte forma: $x^2 = 25$, logo $x = \pm\sqrt{25}$, obtendo, assim, a raízes $x = 5$ ou $x - 5$ ou da equação $4x^2 - 100 = 0$.

Neste exemplo, podemos perceber que não há necessidade de aplicarmos as quatro etapas para resolução de problemas de Polya (1975), porém, temos uma quantidade considerável de conceitos e definições do cálculo algébrico aplicados.

Para o caso da equação do tipo $ax^2 = 0$, com $a \neq 0$, a solução é trivial, ou seja, a equação tem sempre duas raízes reais iguais a zero. Os passos para resolução da equação anterior também valem para a equação do tipo $ax^2 = 0$. Basta, então, discorrer sobre o porquê aparecerem duas raízes na solução da equação, em que, sendo $b \neq 0$ para a equação do tipo $ax^2 = 0$, obtém-se dois valores iguais com sinais opostos. E, também, para a não existência de raízes reais quando $x = \pm\sqrt{-\frac{a}{b}}$.

Portanto, ficam assim definidas algumas particularidades da equação polinomial do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, sem entrar em outros assuntos que são pertinentes como o módulo (valor absoluto) e racionalização. Porém, algumas proposições e cálculos serão discutidos nas tarefas propostas para os estudantes, apresentadas na subseção a seguir, que, posteriormente, serão incorporadas à Sequência Didática do Produto Educacional.

Recursos tecnológicos voltados ao ensino de matemática como o GeoGebra é um exemplo de tecnologia, cuja BNCC (BRASIL, 2018) preconiza. Na seção seguinte é apresentada a Base Nacional Comum Curricular composta por competências e habilidades voltadas para a matemática.



Unidade 3

Competências e Habilidades em Matemática preconizadas pela BNCC

EDUCAÇÃO É A BASE

Fonte: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

1 Competências e Habilidades em Matemática preconizadas pela BNCC

As competências e habilidades em matemática preconizadas na BNCC (BRASIL, 2018) e, suas mudanças e implicações, principalmente, para a álgebra para o 8º ano fazem parte dos objetivos específicos desta pesquisa. Também buscou-se apresentar a habilidade, na qual, deseja-se que os estudantes desenvolvam.

A BNCC apresenta definições e conceitos quanto às habilidades e competências. Por se tratar de um documento que tem caráter normativo, a BNCC define-se por um conjunto organizado e progressivo das aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver. O documento aplica-se exclusivamente à educação escolar e "está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN)" (BRASIL, 2018, p. 7).

As aprendizagens essenciais definidas na BNCC devem assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais, oportunizando aos estudantes seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento. Na BNCC (BRASIL, 2018, p. 8), define-se competência como "a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho". Além disso, ainda, aponta que:

> É imprescindível destacar que as competências gerais da BNCC, [...] inter-relacionam-se e desdobram-se no tratamento didático proposto para as três etapas da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), articulando-se na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores, nos termos da LDB. (BRASIL, 2018, p. 8-9).

A Matemática está organizada na BNCC (BRASIL, 2018) do Ensino Fundamental pelas unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e, Probabilidade e Estatística; nas quais, cada unidade temática contém objetos de conhecimento e habilidades que deverão ser desenvolvidas nos estudantes em todo o Ensino Fundamental. A BNCC, também traz algumas novidades como as habilidades relacionadas à tecnologia, à robótica e à programação.

A Matemática no Ensino Fundamental compreende as unidades temáticas da sua área para, então, garantir que os estudantes relacionem observações e as representem por meio de tabelas, gráficos, figuras e esquemas e, associem tais representações a uma atividade matemática. Para isso, a BNCC (BRASIL, 2018) coloca que o Ensino Fundamental tem o compromisso com o letramento matemático e que os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem são formas privilegiadas da atividade matemática.

A BNCC (BRASIL, 2018, p. 264) aponta que esses processos matemáticos "[...] [são] processos de aprendizagem [que] são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional."

Dentre estas competências destacam-se as competências 3, que traz as relações entre geometria e álgebra; 5, pois, trata-se da competência que dá validade quanto à inserção do GeoGebra nesta pesquisa. E, a competência 6 que faz referência a situações problema.

Contudo, faz-se necessário desenvolver todas as oito competências. Ou seja, a BNCC (BRASIL, 2018) torna possível a introdução de novas metodologias como a Problem Based Learnig, aprendizagem baseada em problemas, o Science, Technology, Engineering, Arts e Mathematics (STEAM), baseada em aulas que integram ciências, tecnologia, engenharia, arte e matemática e dentre outras metodologias utilizadas para desenvolvimento de habilidades.

Cada uma das unidades temáticas é composta por "objetos de conhecimentos" e suas respectivas habilidades. Por exemplo: "Valor numérico de expressões algébricas" é um objeto de conhecimento da unidade temática álgebra. Com esse objeto de conhecimento espera-se que os estudantes desenvolvam a habilidade EF08MA06[1]: "Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações" como podemos ver no quadro a seguir. (BRASIL, 2018, p. 312-313).

1 Código alfanumérico que identifica a habilidade. No caso do código EF08MA09 temos: **EF** indica a etapa Ensino Fundamental; **08** indica o ano escolar: 8º ano; **MA** indica a componente curricular matemática e, **09** indica a sequência das habilidades constituídas para o ano escolar em referência.

Quadro 1: Descrição da unidade temática de álgebra para o 8º Ano.

Unidade Temática	Objetos De Conhecimento	Habilidades
Álgebra	Valor numérico de expressões algébricas	(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
	Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano	(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
	Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano	(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
	Equação polinomial de 2º grau do tipo	(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo .
	Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes. (EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
	Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano. (EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

Fonte: BNCC (Brasil, 2018)

Considerando a unidade temática álgebra para o 8º ano como mostrado no Quadro 1, temos que, entre todo o Ensino Fundamental, a BNCC (BRASIL, 2018) preconiza oito habilidades, ou seja, é evidente o predomínio da álgebra no 8º ano mesmo na unidade de geometria, pois, a partir do 8º ano tem-se uma intensificação na abstração matemática em álgebra o que é essencial para os anos conseguintes.

Como cada objeto de conhecimento é composto de habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes, a BNCC traz verbos que expressam uma ação para gerar uma mudança (desenvolver habilidades). São os verbos: Resolver, Elaborar, Associar, Identificar e Construir. Esses verbos de ação, também, podem ser tratados de verbos que direcionam os estudantes a uma atividade mental, o que corrobora com um de seus objetivos para a matemática, em que a BNCC (BRASIL, 2018, p. 9) expressa:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

Diante do que foi apresentado, sentiu-se a necessidade de apontar a definição de habilidade e competência. Esses dois conceitos encontram-se em diversos documentos como nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNEM) e Orientações Curriculares Nacionais para Ensino Médio (OCNEM) e nos sistemas de avaliação nacionais, o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), Prova Brasil (BRASIL, 2011), Exame Nacional de Ensino Médio (ENEM) e o Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (ENCCEJA). Agora, temos a BNCC (BRASIL, 2018) que, também, traz esses conceitos.

Assim, com base nas habilidades e competências preconizadas pela BNCC, foram delineadas quais as competências específicas e as habilidades matemáticas a serem alcançadas com o GeoGebra no 8º ano. Além disso, a BNCC (BRASIL, 2018) também apresenta competências específicas de matemática para o Ensino Fundamental, sendo as mais relevantes para a pesquisa, as competências específicas 5 e 6 na utilização de processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis e situações problema.

Ao refletir sobre uma tecnologia que auxilie no desenvolvimento das habilidades em álgebra, o software GeoGebra se destaca por ser reconhecido entre educadores matemáticos pelo seu carácter dinâmico e que abrange, o ensinar e o aprender matemática nas interfaces que permitem cálculos e apresentações gráficas, construções geométricas etc.

Unidade 4

GeoGebra

Classic 6

Fonte: https://GeoGebra.es/GeoGebra.html

Markus Hohenwarter (criador do GeoGebra)

1 O GeoGebra

O GeoGebra é um software de geometria dinâmica que abrange geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em uma única interface gráfica, ou seja, é uma multiplataforma que proporciona várias resoluções de problemas. O GeoGebra é um software livre criado para ser utilizado em todos os níveis de ensino e segundo Basniak e Estevam (2014, p. 13) "possui uma interface amigável que facilita a criação de construções matemáticas e modelos que permitem explorações interativas, arrastando objetos e alterando parâmetros".

O GeoGebra foi criado pelo austríaco Markus Hohenwarter para ser utilizado em sala de aula. O projeto teve início em 2001 e encontra-se em constante atualização. O GeoGebra apresenta muitas vantagens para a aprendizagem com tecnologia, como por exemplo, a possibilidade exibir diferentes representações de um mesmo objeto por janelas que interagem entre si. Apresenta, também, recursos didáticos por possibilitar a criação de figuras, que são salvas como PNG[1] e, posteriormente, utilizadas em editores de texto. Do mesmo modo, Hohenwarter (2014, p. 11) conclui expondo que:

> O software de matemática dinâmica GeoGebra oferece a possibilidade de gerar applets interativos para uso em ambientes de aprendizagem. Seus gráficos, álgebra, álgebra computacional e visualizações de planilhas combinam representações matemáticas entre si de forma interativa e caminhos conectados. Por um lado, o software facilita a visualização de dados matemáticos conceitos e fatos. Por outro lado, o GeoGebra suporta a interação de diferentes formas de representação de objetos matemáticos.

O GeoGebra Classic 6 que será utilizado nesta pesquisa, está disponível para download[2] em português e seus aplicativos são gratuitos e podem ser baixados para os sistemas: iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux.

O GeoGebra encontra-se disponível online e para download[2] nas versões: Calculadora Gráfica, em que possibilita o usuário traça gráfico de funções, resolver equações etc.; 3D Calculator, em que é possível representar funções 3D, superfícies e outros objetos em 3D; Geometria para a Construção de figuras planas, ângulos, transformações etc.; GeoGebra Classic 6 que reúne todos os aplicativos como geometria, planilha, probabilidade e CAS (Computer Algebra System) Sistema de Álgebra

1 PNG (**Portable Network Graphics**) é um formato de dados utilizado para imagens.
2 https://www.geogebra.org/download?lang=pt

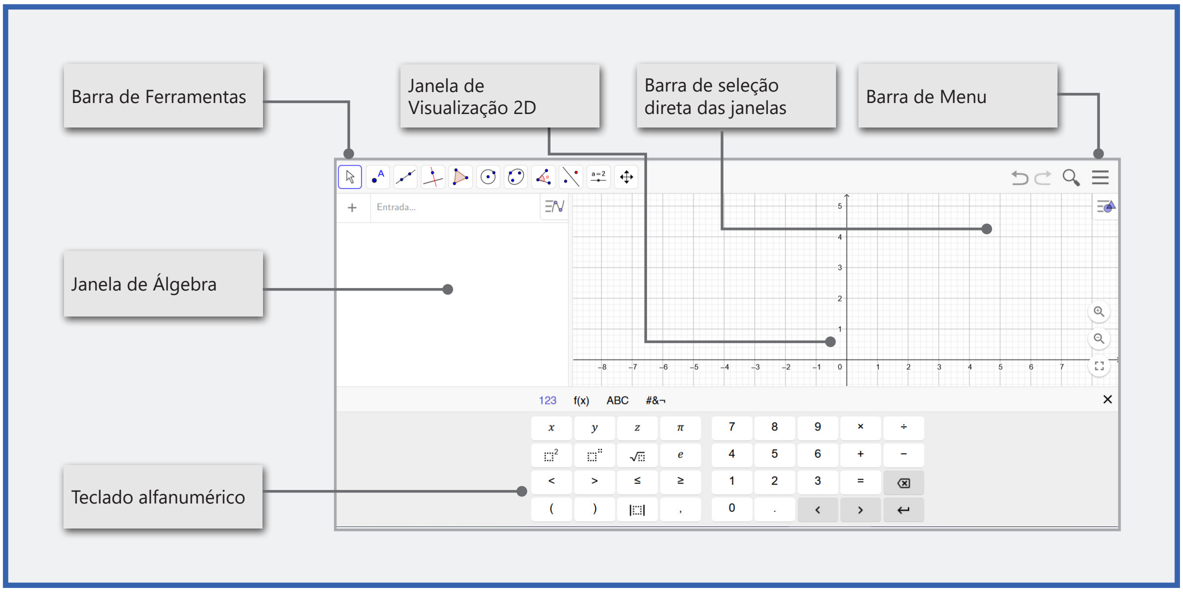
Computacional para cálculos simbólicos e, agora, em 2020 foi lançado o GeoGebra notes[3] que funciona como um bloco de notas e tem como possibilidades a inserção de vídeos, texto, equações a janela CAS e outros anexos.

Há, também, os aplicativos apenas para download a Realidade Aumentada, que possibilita introduzir a matemática 3D ao mundo real e o GeoGebra Classic 5 que reúne todos os aplicativos como geometria, planilha, probabilidade e CAS. Deste modo, Basniak e Estevam (2014, p. 14) consideram que:

> Um aspecto importante a ser considerado ao se trabalhar no GeoGebra é verificar a versão em que está trabalhando, tendo em conta que ele vem sendo atualizado constante e continuamente e muitas de suas ferramentas e funções têm sofrido mudanças de acordo com essas atualizações.

Na Figura 2 é apresentada a tela inicial do GeoGebra Classic 6, que comparada às versões anteriores, são verificadas que em sua versão 6 possui mais ícones de acesso e de fácil manipulação. Também há um teclado alfanumérico que dá acesso aos símbolos matemáticos e, que pode ser minimizado e maximizado quando necessário, o que facilita a introdução dos comandos apenas com a utilização do mouse ou dedo caso seja utilizado no smartphone.

Figura 2: Janela de Visualização inicial do GeoGebra Classic 6



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

3 https://www.geogebra.org/notes

No produto educacional constará um breve tutorial para o GeoGebra Classic 6 que compõe o produto educacional. Contudo, durante a pesquisa foram utilizadas, principalmente, as Janelas de visualização 2D e a Janela CAS e, em algumas tarefas, também foi utilizada a Janela de visualização 3D.

No site[4] do software GeoGebra: "O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculo em um pacote fácil de usar. O GeoGebra é uma comunidade em rápida expansão, com milhões de usuários localizados em praticamente todos os países do mundo. O GeoGebra tornou-se líder no fornecimento de software de matemática dinâmica, apoiando a educação e as inovações da Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática (STEM) no ensino e aprendizagem em todo o mundo". Além disso, é ganhador de vários prêmios na Europa e nos Estados Unidos.

O GeoGebra é um software/aplicativo educativo utilizado como ferramenta no ensino de matemática em várias escolas e universidades e, que oferece acesso visual em suas Janelas de Visualização e recursos numéricos, algébricos e geométricos em suas Barras de Ferramentas. O GeoGebra foi criado pelo austríaco Markus Hohenwarter[5].

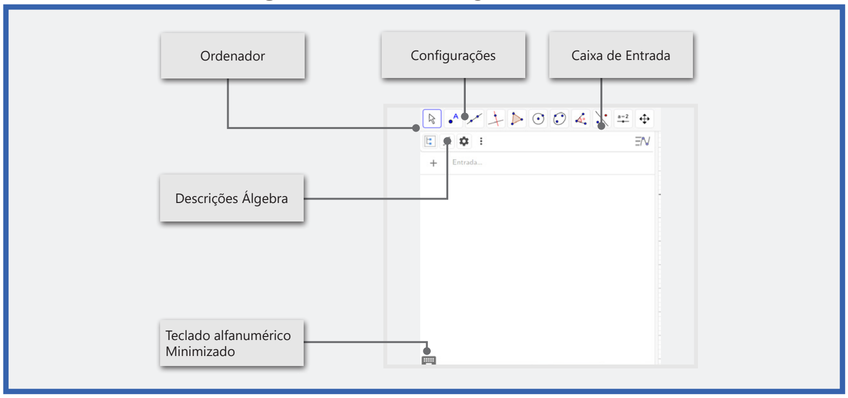
2 Janelas do GeoGebra

Algumas Janelas podem ser acessadas individualmente, como mostrado na Barra de Menu com as Disposições, logo ao inicializar o software na **Barra de seleção direta de janelas.**

3 Janela de Álgebra

A Janela de Álgebra mostra todas as entradas, sejam objetos ou funções matemáticas.

Figura 3: Janela de álgebra.



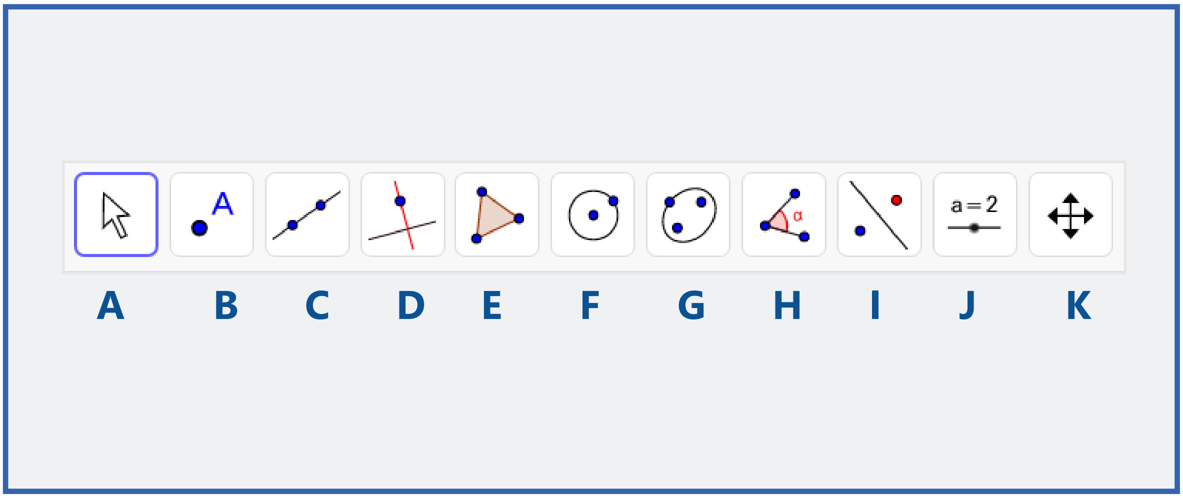
Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

4 www.geogebra.org
5 Departamento de Educação Matemática, Universidade Johannes Kepler (JKU), Linz – Áustria.

Ao selecionar o ícone circulado na figura anterior se abrirá uma janela com as opções de Expressão, Texto, Imagem e Ajuda.

Como na versão do GeoGebra 3.2, a barra de ferramentas apresenta 11 ícones iniciais e outras 59 ferramentas minimizados, uma a mais que na sua versão 3.2, na qual cada ferramenta possui uma funcionalidade específica. A figura seguir mostra os 11 ícones de ferramentas iniciais.

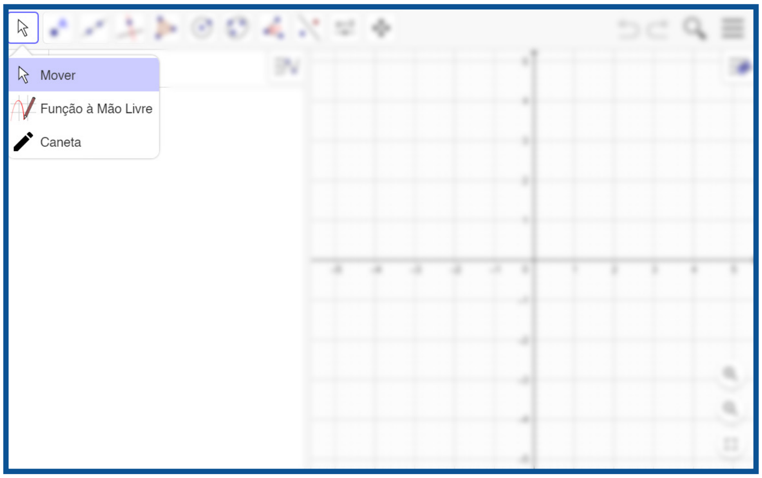
Figura 4: Barra de ferramentas Janela de álgebra.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Como exposto no parágrafo anterior, cada um dos ícones de ferramentas acima, possui algumas outras ferramentas minimizadas, de maneira que, ao clicar em algum ícone das ferramentas iniciais, se abrirá outras ferramentas. Por exemplo, ao clicar no ícone da ferramenta "**A**", ela nos mostrará a seguinte aba de opções.

Figura 5: Ícone Mover da barra de ferramentas.

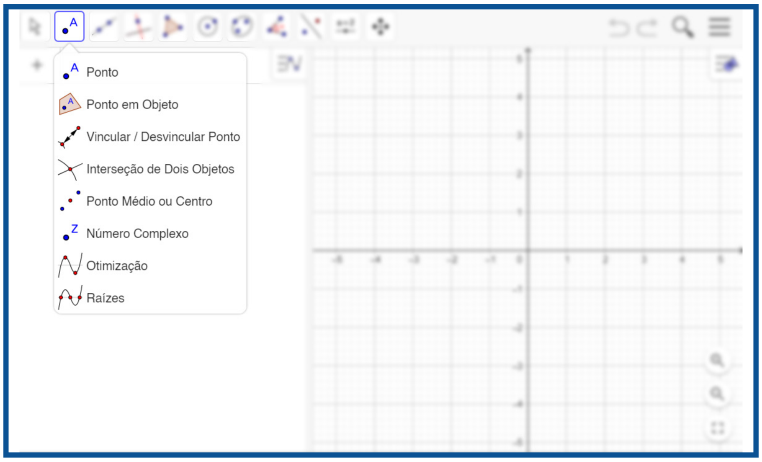


Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Temos então a ferramenta "**Mover**", na qual podemos selecionar, arrastar e manipular objetos; com a ferramenta "**Função à mão livre**" podemos desenhar uma função ou algum objeto geométrico, porém, tem suas limitações e com a ferramenta **"Caneta"** podemos escrever ou desenhar qualquer coisa.

Ao clicar no ícone da ferramenta "**B**", ela nos mostrará a seguinte aba de opções:

Figura 6: Ícone Ponto da barra de ferramentas.



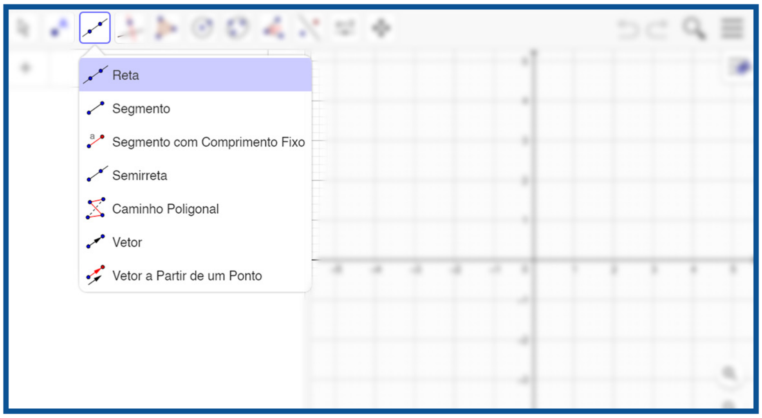
Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Com a ferramenta "**Ponto**" podemos inserir um ponto, e se continuarmos, vários pontos podem ser inseridos na janela de visualização, também podemos inseri-lo numa curva ou função; com a ferramenta "**Ponto em Objeto**" pode-se fixar um ponto numa determinada curva ou objeto, delimitando sua fronteira; com a ferramenta "**Vincular/ Desvincular Ponto**", como o nome sugere, essa ferramenta vincula ou desvincula um ponto de uma função ou objeto.

A ferramenta "**Interseção de Dois Objetos**" inclui um ponto na interseção entre os objetos, caso tenha interseção; a ferramenta "**Ponto Médio ou Centro**" acrescenta um ponto médio entre dois pontos criados anteriormente ou pode-se acrescentá-los e automaticamente será gerado um ponto entre eles; a ferramenta "**Número Complexo**" gera um número complexo conforme a posição selecionada na janela de visualização; com a ferramenta "**Otimização**" acrescenta um ponto nos extremos locais de uma função ou nas bordas de um objetos e com a ferramenta "**Raízes**" nos mostrará todos os pontos em que a função corta o eixo das abscissas.

O ícone da ferramenta "**C**" nos mostra uma janela com opções de manipulação com reta, semirreta, seguimento e vetores.

Figura 7: Ícone Reta da barra de ferramentas.

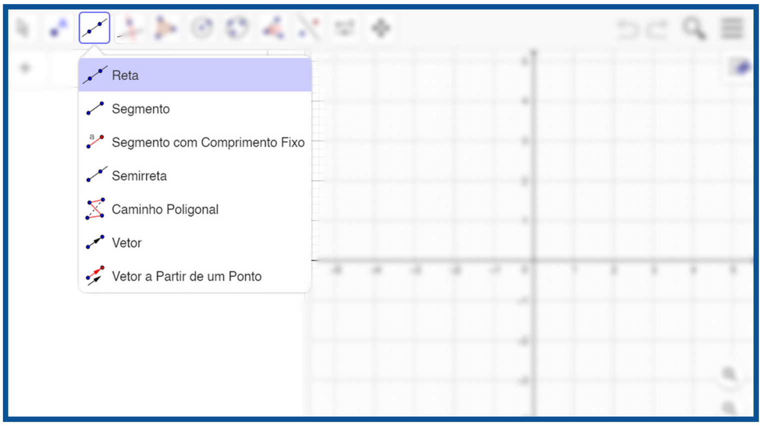


Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Na ferramenta "**Reta**" ao selecionarmos dois pontos ou duas posições na janela de visualização cria-se uma reta definida por esses dois pontos; com a ferramenta "**Seguimento**" podemos inserir seguimentos de reta, dado dois pontos; a ferramenta "**Seguimento com Comprimento fixo**" assim como na ferramenta seguimento, quando selecionada, cria um seguimento de reta entre dois pontos, mas com medida fixa; a ferramenta "**Semirreta**" cria justamente uma semirreta a partir de um ponto inicial e outro ponto qualquer; a ferramenta "**Caminho Poligonal**" quando selecionada, cria um caminho a partir dos vértices de uma dada função; a ferramenta "**Vetor**" quando selecionada, cria um vetor, dado dois pontos e com a ferramenta "Vetor a Partir de um Ponto" selecionada, podemos criar um vetor paralelo ou criar uma direção para um dado ponto.

O ícone da ferramenta "**D**" nos mostrará uma janela de opções de manipulação com retas, com ferramentas especificas como mostrado na figura a seguir:

Figura 8: Ícone Reta Perpendicular da barra de ferramentas.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

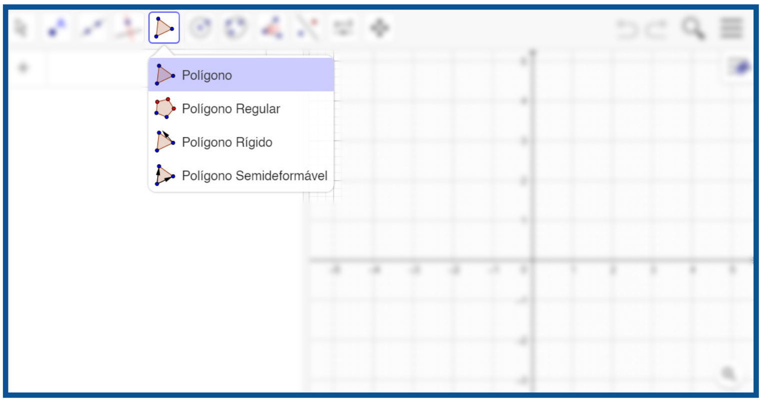
A ferramenta "**Reta Perpendicular**" quando selecionada, cria uma reta perpendicular a partir de uma reta, semirreta, seguimento de reta ou vetor criado anteriormente;

a ferramenta “**Reta Paralela**” quando selecionada, cria a partir de um ponto e uma reta ou semirreta ou seguimento de reta ou vetor, uma reta paralela; a ferramenta “**Mediatriz**” quando selecionada, cria-se uma reta mediatriz e perpendicular entre dois pontos selecionados numa reta ou num seguimento de reta; já a ferramenta “**Bissetriz**” quando selecionada, cria reta que corta um ângulo implícito ou explícito entre duas retas ou semirretas ou seguimentos de retas, e criando ao mesmo tempo uma reta perpendicular à bissetriz a partir do ponto de origem do ângulo formado.

A ferramenta “**Reta Tangente**” quando selecionada, criará automaticamente uma reta tangente no ponto da curva, ao clicar no ponto que está na curva selecionando os dois; com a ferramenta “**Reta Polar ou Diametral**” podemos criar uma linha polar ou diâmetro selecionando primeiramente um ponto ou reta e posteriormente um círculo ou cônica; a ferramenta “**Reta de Regressão Linear**” quando selecionada, cria uma reta linear entre os pontos que se deseja fazer uma regressão linear, porém, todos os pontos devem ser selecionados com o botão direito do mouse; a ferramenta “**Lugar Geométrico**” quando selecionada, descreve o movimento de um dado objeto, que vai sendo construído ao longo de sua trajetória.

O ícone da ferramenta “**E**” nos mostra uma janela de opções para a construção de polígonos, como mostra a figura:

Figura 9: Ícone Polígono da Barra de ferramentas.

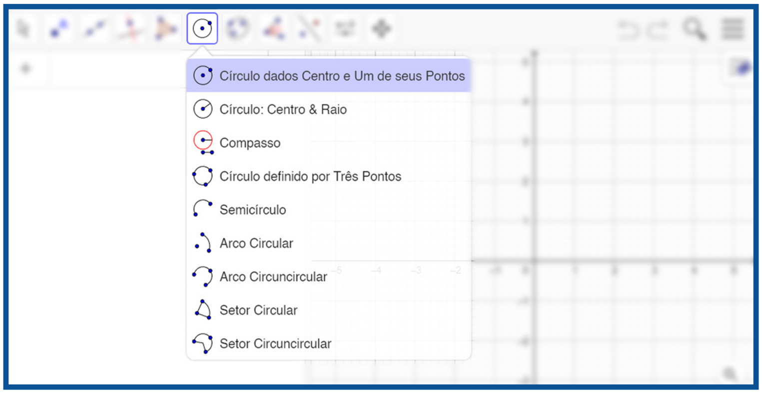


Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Com a ferramenta “**Polígono**” podemos desenhar um polígono de **N** lados, e para concluir a figura temos de voltar ao ponto inicial da criação do mesmo; a ferramenta “**Polígono Regular**” também cria um polígono, porém, com lados iguais, em que dado dois pontos abrir-se-á uma janela para digitarmos quantos lados queremos que tenha o nosso polígono regular; a ferramenta “**Polígono Rígido**” nos possibilita criar um polígono que não se podem redimensionar os lados criados; com a ferramenta “**Polígono Semideformável**” selecionada, podemos criar um polígono qualquer, porém, automaticamente serão criados controles deslizantes, que percorrem a horizontal e a vertical num intervalo dado.

O ícone da ferramenta “**F**” contém nove ferramentas para criação de círculos, setores circulares e arcos, como vemos na seguinte figura.

Figura 10: Ícone Círculo da barra de ferramentas.



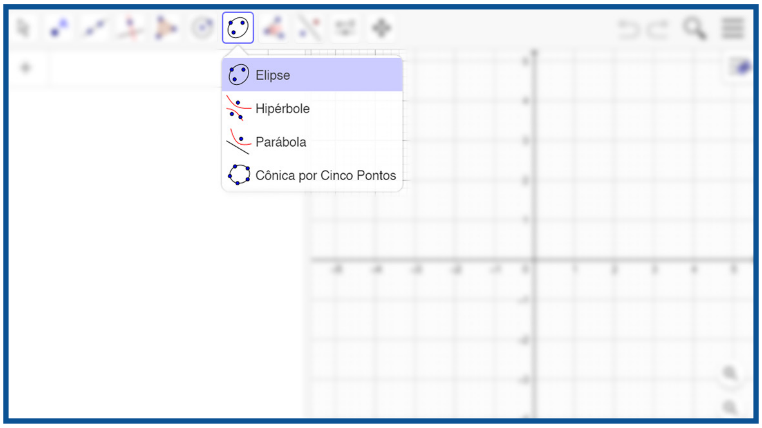
Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A ferramenta “**Círculo dados Centro e Um de seus Pontos**” cria um círculo por meio do primeiro ponto selecionado (centro do círculo) e outro ponto que se deseja que faça parte da borda do círculo; com a ferramenta “**Círculo dados Centro e Raio**” podemos cria um círculo escolhendo onde será o seu centro, e logo após abrirá uma janela para que se digite o tamanho do raio do círculo; com a ferramenta “**Compasso**” também podemos criar um círculo, porém, temos de selecionar dois pontos quaisquer ou dois de um seguimento de reta, onde, o primeiro ponto estará na borda e o segundo será o seu centro; a ferramenta “**Círculo definido por Três Pontos**” cria-se justamente o que ela sugere, um círculo escolhendo-se três pontos; com a ferramenta “**Semicírculo Definido por Dois Pontos**” também, sugere o que essa ferramenta pode criar, ou seja, um semicírculo a partir de dois pontos, criando-se sempre em sentido horário.

E com a ferramenta “**Arco Circular**” podemos criar um arco dados o ponto central e outros dois pontos; com a ferramenta “**Arco Circuncircular**” podemos criar um arco a partir de três pontos escolhidos; com a ferramenta “**Setor Circular**” cria-se um setor circular opaco a partir da escolha do centro e outros dois pontos e com a ferramenta “**Setor Circuncircular**” cria-se um Setor Circuncircular a partir de três pontos.

O ícone da ferramenta “**G**” contém algumas ferramentas de construção das curvas cônicas, ou seja, da Elipse, Hipérbole e Parábola.

Figura 11: Ícone Elipse da barra de ferramentas.

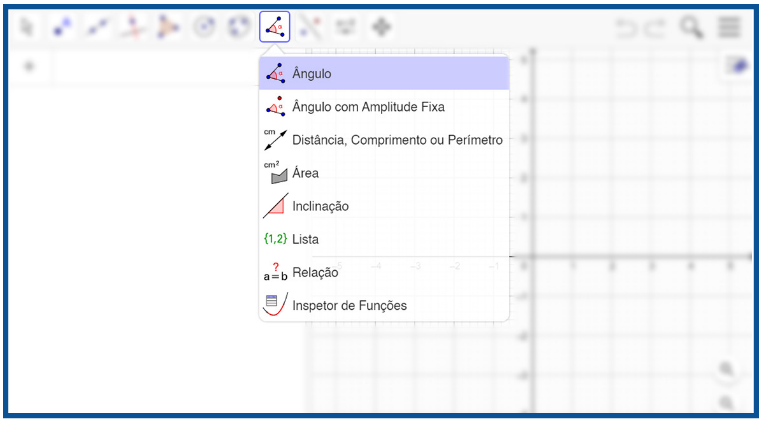


Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A ferramenta "**Elipse**" constrói uma elipse a partir de três pontos, sendo dois focos e o terceiro ponto na curva; com a ferramenta "Hipérbole", assim como com a ferramenta Elipse, podemos construir uma hipérbole com três pontos, sendo dois focos e um ponto na curva; com a ferramenta "**Parábola**" podemos construir uma parábola utilizando um ponto e tendo uma reta diretriz e a ferramenta "**Cônica por Cinco Pontos**" constrói uma elipse, parábola ou hipérbole a partir de cinco pontos.

O ícone da ferramenta "**H**" contém ferramentas auxiliares como: marcar e medir o ângulo, mostrar o comprimento, mostrar a área, mostrar a relação e a inclinação.

Figura 12: Ícone Ângulo da barra de ferramentas.



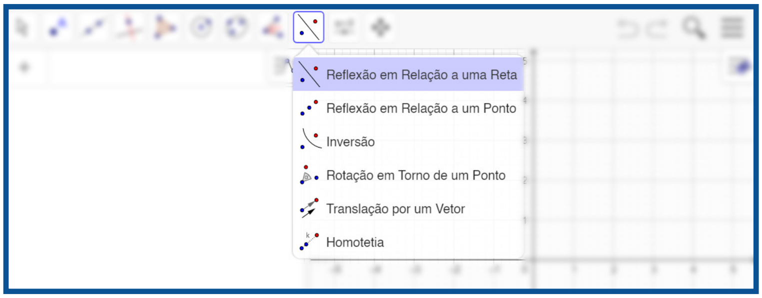
Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Com a ferramenta "**Ângulo**" é possível marcar ângulo interno ou externo entre duas retas, semirretas ou seguimentos de retas, ou medir um ângulo a partir de três pontos; com a ferramenta "**Ângulo com Amplitude Fixa**" pode-se construir um ângulo a partir de dois pontos, porém, sua medida será pré-definida numa segunda janela, onde se deverá escolher o sentido do ângulo a ser criado (horário ou anti-horário); a ferramenta "**Distância, Comprimento ou Perímetro**" nos mostra a distância ou o comprimento entre dois pontos ou dois objetos e, se tratar de um polígono a ferramenta fixa o comprimento de cada lado e mostra o perímetro; a ferramenta **“Área”** mostra a área de uma região delimitada.

A ferramenta “**Inclinação**” mostra a inclinação de uma reta; com a ferramenta “Lista” podemos criar uma lista de objetos ou pontos e, para isso devemos selecionar, primeiramente, os objetos e só depois a ferramenta lista; a ferramenta “**Relação**” mostra se há ou não uma relação entre dois ou mais objetos, ou seja, se são colineares, se há interseção etc.; a função “**Inspetor de Funções**” nos mostra uma análise feita de um intervalo de um dado gráfico de uma função construído, mostrando o ponto de máximo, o ponto de mínimo, raízes, valor da área, valor da integral e a média.

No ícone da ferramenta **“I”** contém algumas ferramentas de reflexão de objetos, ou seja, de simetria. Além de outras ferramentas como mostra a figura a seguir:

Figura 13: Ícone Reflexão da barra de ferramentas.

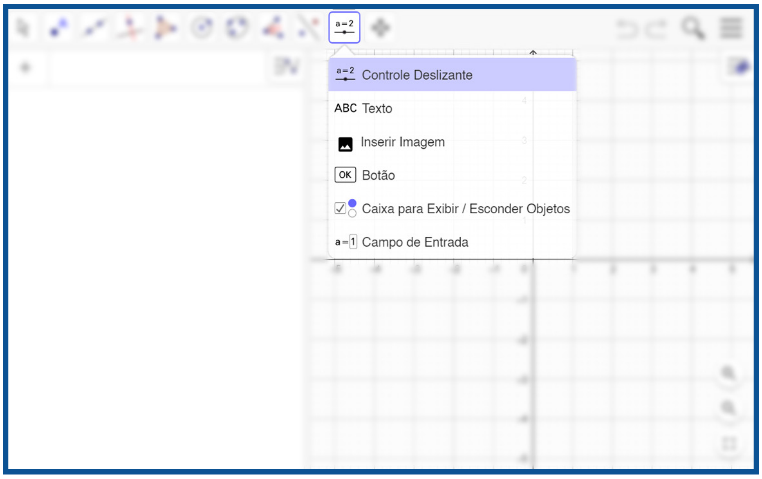


Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A ferramenta “**Reflexão em Relação a uma Reta**” constrói um reflexo (simetria axial) com relação a uma reta de um ponto, círculo, reta, polígono etc. E o mais interessante é que o reflexo herda todas as características do objeto; com a ferramenta “**Reflexão em Relação a um Ponto**” podemos, também, construir um reflexo (simetria central), porém, com relação a um ponto; com a ferramenta “**Inversão**” podemos construir o reflexo de um ponto sobre um círculo; com a ferramenta “**Rotação em Torno de um Ponto**” criamos o reflexo (simetria rotacional) ao redor de um ponto por um ângulo fixo que será determinado numa nova janela, em sentido horário ou anti-horário; com a ferramenta “**Translação por um Vetor**” podemos construir o reflexo (simetria de translação) de um objeto a partir de um vetor e com a ferramenta “**Homotetia**” podemos construir uma Homotetia de um objeto a partir de um ponto ou fator comum (uma razão de semelhança).

O ícone de ferramentas **“J”** contém algumas ferramentas para inserir na janela de visualização e servem como auxiliares a aplicações, como imagem, controle deslizante, texto, botão, caixa e campo de entrada.

Figura 14: Ícone Controle deslizante da barra de ferramentas.

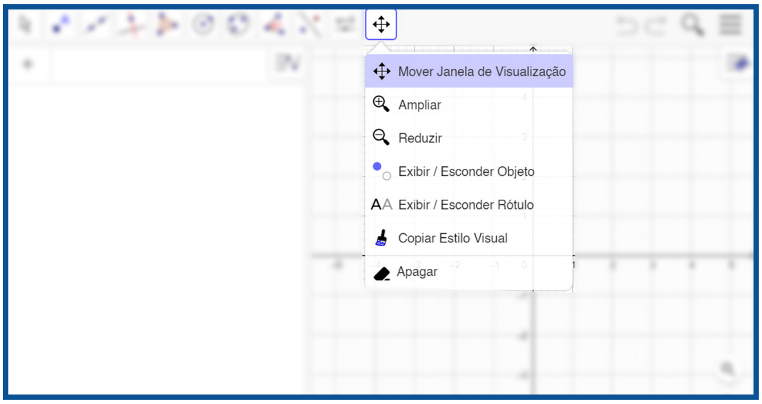


Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Com a ferramenta "**Controle Deslizante**" podemos modificar um parâmetro, muito usado no estudo de funções; com a ferramenta "**Texto**" podemos inserir um texto que será digitado numa segunda janela e o respectivo texto aparecerá na janela de visualização; com a ferramenta "**Botão**" podemos criar um botão com uma legenda e um código a ser definido e que deverá ser digitado em uma segunda janela; a ferramenta "**Caixa para Exibir/ Esconder Objetos**" nos permite exibir e esconder objetos que já foram inseridos na janela de visualização e, que deverão ser selecionados numa segunda janela e, ainda podemos escolher uma legenda para o que será escondido/ exibido e com a ferramenta "**Campo de Entrada**" podemos criar uma legenda para um dado objeto.

O ícone de ferramentas "**K**" contém ferramentas que auxiliam na parte visual da janela de exibição.

Figura 15: Ícone Mover janela de visualização da barra de ferramentas.



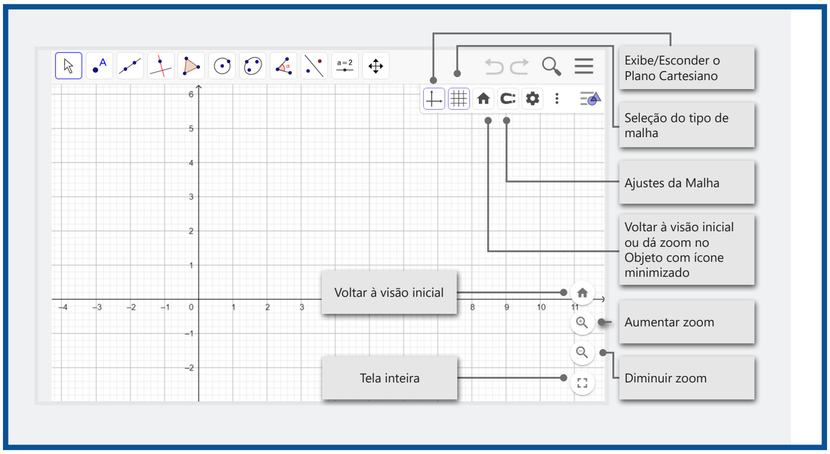
Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Com a ferramenta "**Mover Janela de visualização**" podemos fazer como o nome da ferramenta sugere; com as ferramentas "**Ampliar**" e "**Reduzir**" podemos aumentar e diminuir o zoom ao clicar num lugar da janela de visualização; com a ferramenta "**Exibir/ Esconder Objeto**" podemos esconder/exibir cada objeto na janela de visualização; com a ferramenta "**Exibir/ Esconder Rótulo**" podemos esconder/exibir qualquer rótulo de objetos na janela de visualização; com a ferramenta "**Copiar Estilo Visual**", como o nome da ferramenta sugere, podemos copiar o estilo de um objeto e aplicá-lo a outros objetos na janela de visualização e a ferramenta "**Apagar**" quando selecionada, pode apagar todos os objetos na janela de visualização um a um.

4 Janela de Visualização

A Janela de Visualização exibe um Plano cartesiano com uma malha quadriculada, onde são apresentados as funções matemáticas e os objetos que são inseridos.

Figura 16: Janela de visualização.



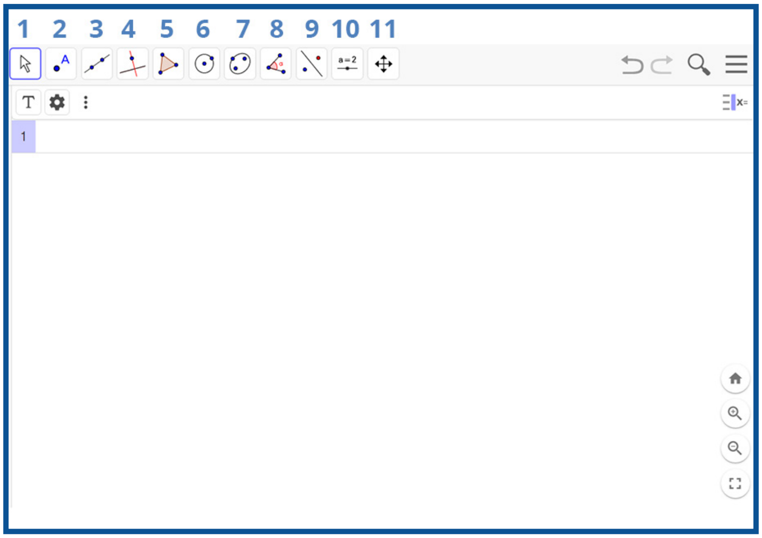
Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Também há uma segunda janela de visualização chamada **Janela de Visualização 2**, que tem as mesmas características da Janela de Visualização, porém, quando selecionada em Exibir na Barra de Menu, a janela abrirá sem a malha e sem as opções de voltar à visão inicial e aumentar/ diminuir zoom como mostrado no canto inferior direto da figura anterior.

5 Janela CAS

A Janela CAS é utilizada para cálculos numéricos e algébricos e seus ícones de ferramentas contém apenas algumas funcionalidades, contudo, em sua entrada de dados não são feitas algumas operações automaticamente, se dermos um "**Enter**" em qualquer operação ela apenas será mantida.

Figura 17: Janela CAS.

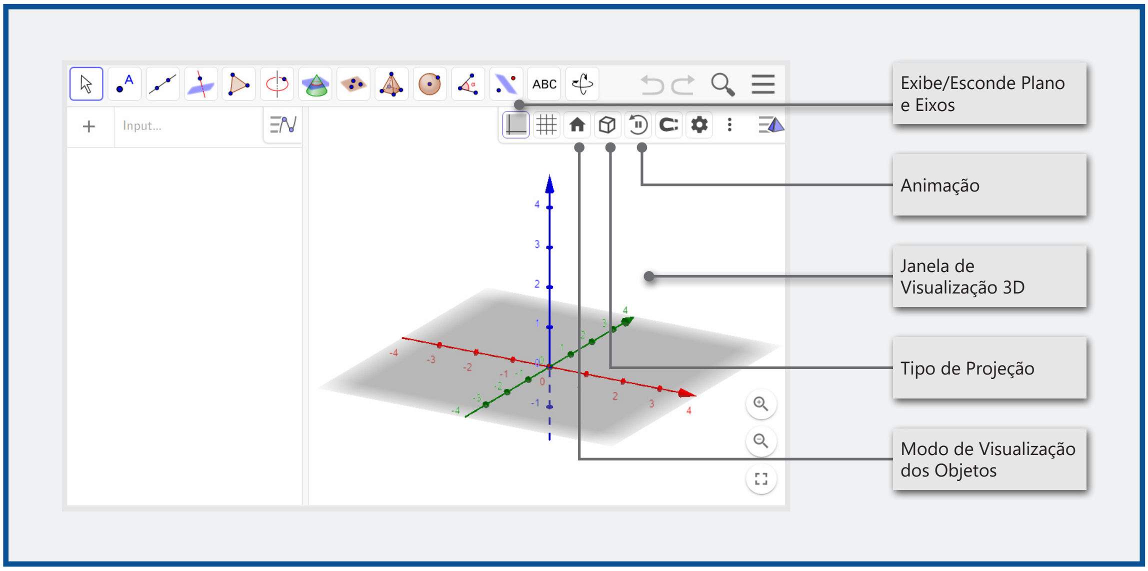


A Barra de ferramentas da Janela CAS contém a ferramenta "**1**" que faz uma avaliação exata ou simbólica; a ferramenta "2" que mostra a aproximação decimal; a ferramenta "**3**" que mantem e verifica a entrada; a ferramenta "**4**" que mostra a fatoração de um dado número; a ferramenta "**5**" que expande os parênteses; a ferramenta "**6**" que substitui uma expressão; a ferramenta "**7**" que resolve uma ou mais equações; a ferramenta "**8**" que resolve uma equação ou um sistema; a ferramenta "**9**" que calcula a derivada primeira; a ferramenta "**10**" que mostra a primitiva de um função matemática e a ferramenta "**11**" que serve para apagar objetos selecionado.

6 Janela de Visualização 3D

A Janela de Visualização 3D, como sugere seu nome, é muito utilizada para visualização de figuras tridimensionais como cubo, esfera, pirâmide, cone, prisma, cilindro dentre outras. E, assim como na janela inicial do GeoGebra e a Janela CAS, a Janela de Visualização tem sua Barra de Ferramentas específicas para aplicações em 3D.

Figura 18: Janela de Visualização 3D.

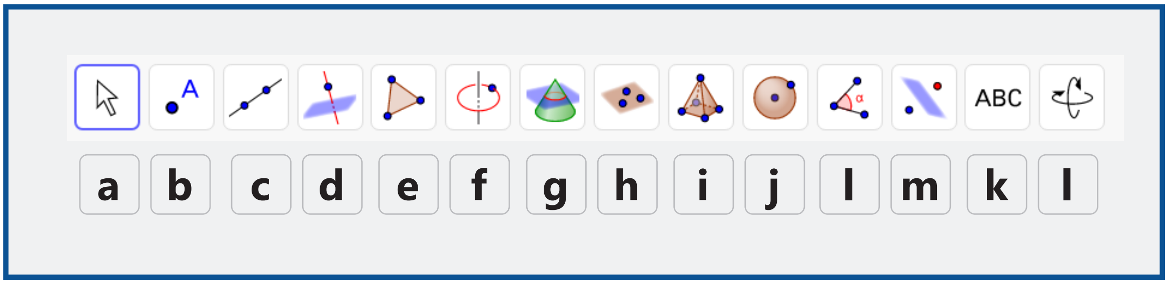


Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

As outras opções da janela 3D como Malha, Modo de captura e Configurações têm as mesmas funcionalidades da janela de visualização inicial.

Na Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D contém 14 ícones de ferramentas iniciais e outras 52 ferramentas minimizadas e algumas das ferramentas apresentadas pela Janela de Visualização inicial, também, se repetem nesta janela.

Figura 19: Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

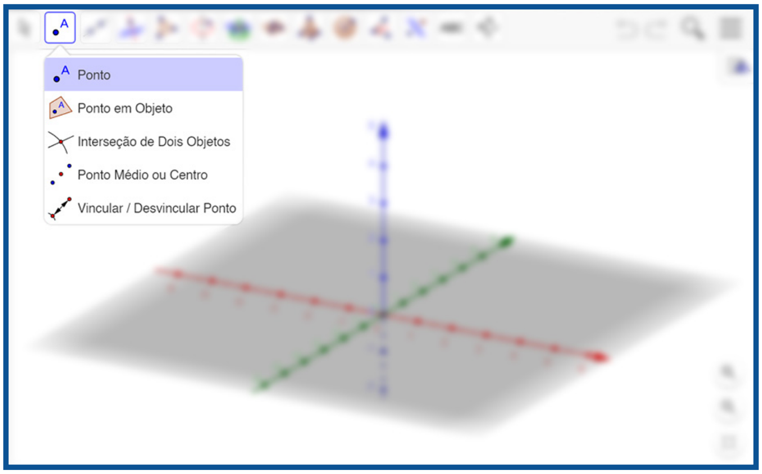
A ferramenta "**a**" já conhecemos, pois foi apresentada na Barra de ferramentas da **seção 1.1**, porém, na janela 3D apresenta-se apenas a ferramenta "**Mover**", como mostra a figura a seguir.

Figura 20: Ícone Mover da Barra de ferramentas

Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O ícone da ferramenta "**b**" contém as mesmas ferramentas da janela de visualização inicial na ferramenta "**B**", porém, não temos à disposição as ferramentas "**Número Complexo**", "**Raízes**" e "Otimização" como podemos ver na figura a seguir.

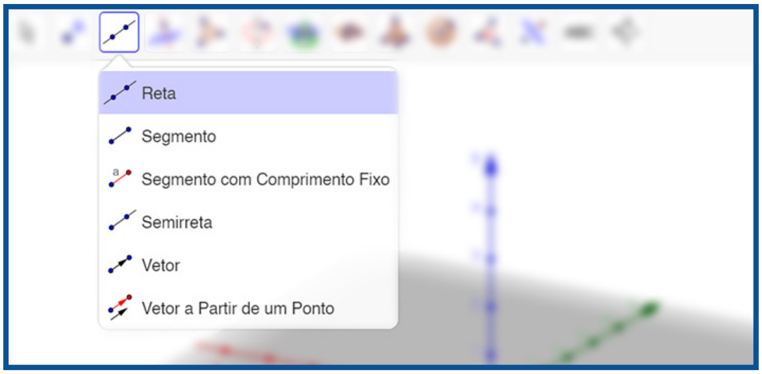
Figura 21: Ícone Ponto da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O ícone da ferramenta "**c**" também contém as mesmas ferramentas da janela de visualização inicial, com exceção da ferramenta "**Caminho Poligonal**" como mostra a figura seguinte.

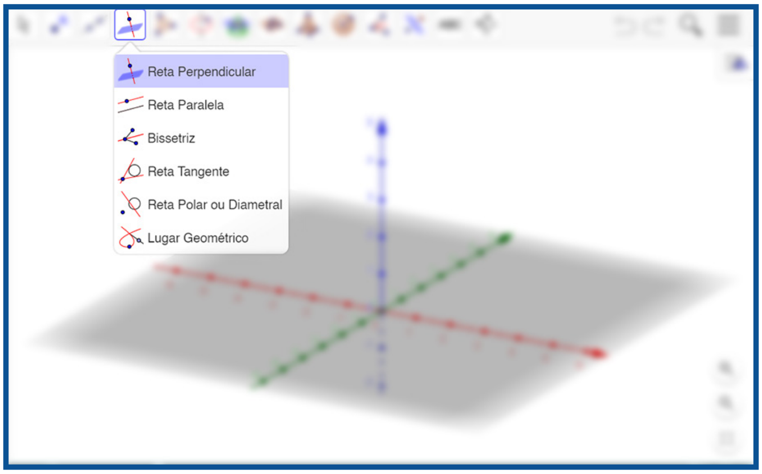
Figura 22: Ícone Reta da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O ícone da ferramenta "**d**" também contém as mesmas ferramentas da janela de visualização inicial, com exceção das ferramentas "**Reta Polar ou Diametral**" e "**Reta de Regressão Linear**", porém, a ferramenta "**Reta Perpendicular**" criará uma reta perpendicular com relação à outra reta e, também, a um plano como na figura a seguir.

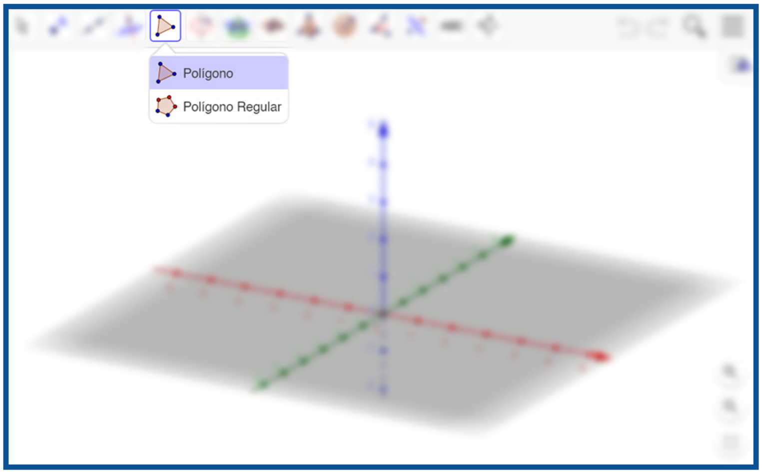
Figura 23: Ícone Reta Perpendicular da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O ícone da ferramenta "**e**" contém apenas a ferramenta "**Polígono**", na qual podemos desenhar um polígono de **N** lados utilizando os três eixos.

Figura 24: **Í**cone Polígono da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.

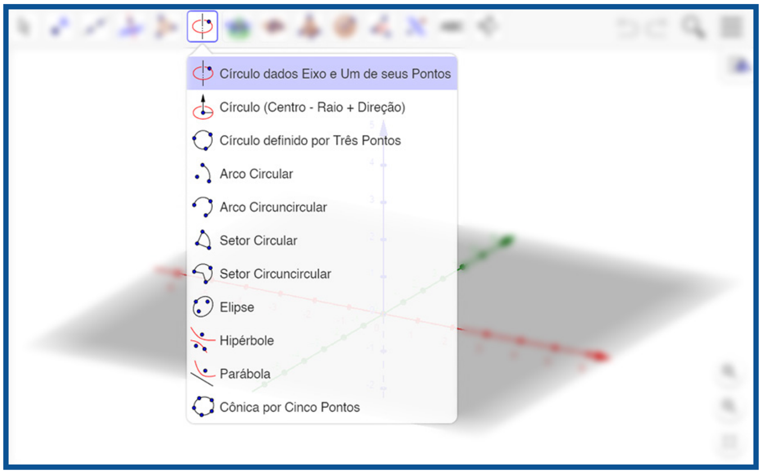


Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O ícone da ferramenta "**f**" contém duas ferramentas novas e une cinco ferramentas da Barra de ferramentas inicial "**F**" (Círculo definido por Três Pontos, Arco Circular, Arco Circuncircular, Setor Circular e Setor Circuncircular) e as quatro ferramentas de "**G**" (Elipse, Hipérbole, Parábola e Cônica por Cinco Pontos), todas estas com as mesmas funcionalidades.

A ferramenta "**Círculo dados Eixo e um de seus Pontos**" cria um círculo selecionando o eixo e um ponto do círculo e com a ferramenta "**Círculo (Centro - Raio + Direção)**" cria-se um círculo selecionando-se o centro e direção e, logo após abrir-se-á uma janela para inserir o valor do raio.

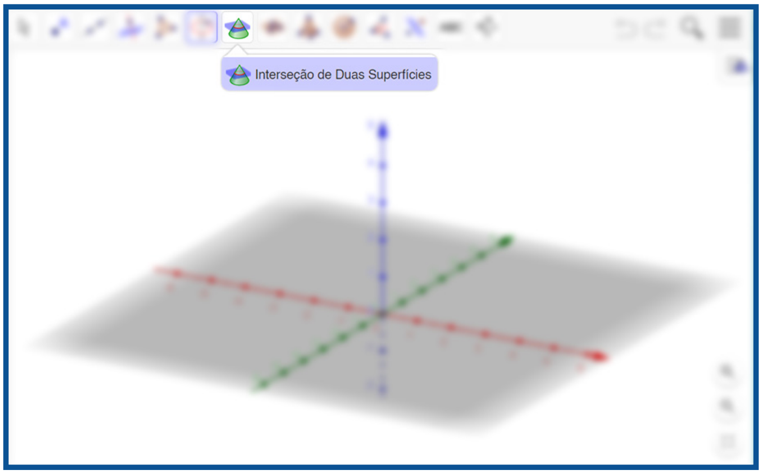
Figura 25: Ícone Círculo da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O ícone da ferramenta "**g**", como mostra a figura a seguir é única e, quando selecionada nos mostra o que sua descrição sugere a "**Interseção entre duas Superfícies**".

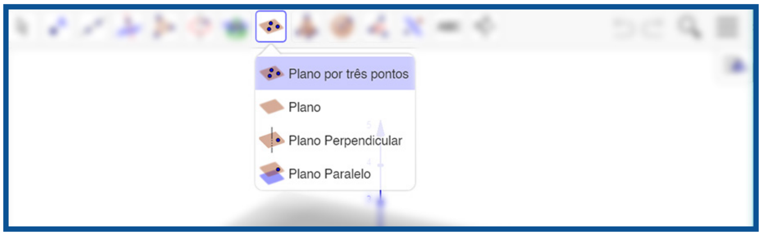
Figura 26: Ícone Intersecção entre superfícies da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O ícone da ferramenta "**h**" contém opções de ferramentas para a construção de planos e planos perpendiculares e paralelos como mostra a figura a seguir.

Figura 27: Ícone Plano da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.

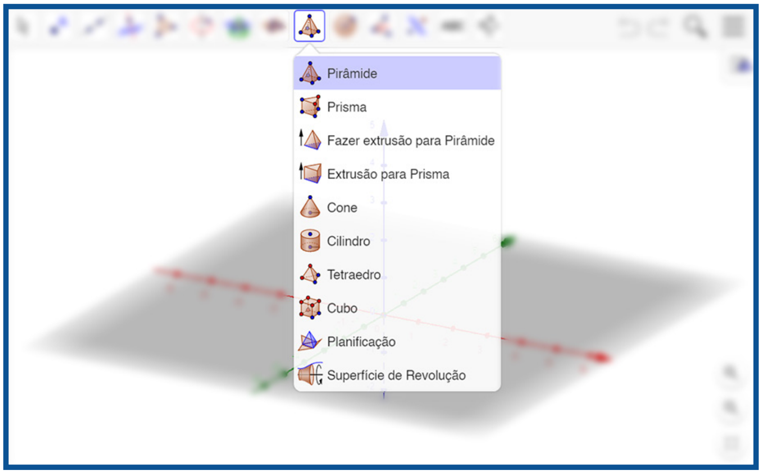


Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A ferramenta “**Plano por três pontos**” nos permite construir um plano por meio de três pontos; com a ferramenta “**Plano**” também podemos construir um plano, porém, devemos selecionar três pontos ou um ponto e uma reta ou duas retas ou um polígono pré-construído para que se construa um plano; com a ferramenta “**Plano Perpendicular**” cria-se um plano perpendicular a uma reta a partir da seleção de um ponto e uma reta e a ferramenta “**Plano Paralelo**” cria um plano paralelo a partir de um ponto e um plano.

O ícone da ferramenta “**i**” contém ferramentas para a construção Poliedros, Cone e Cilindro. Vide figura abaixo.

Figura 28: Ícone Pirâmide da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.



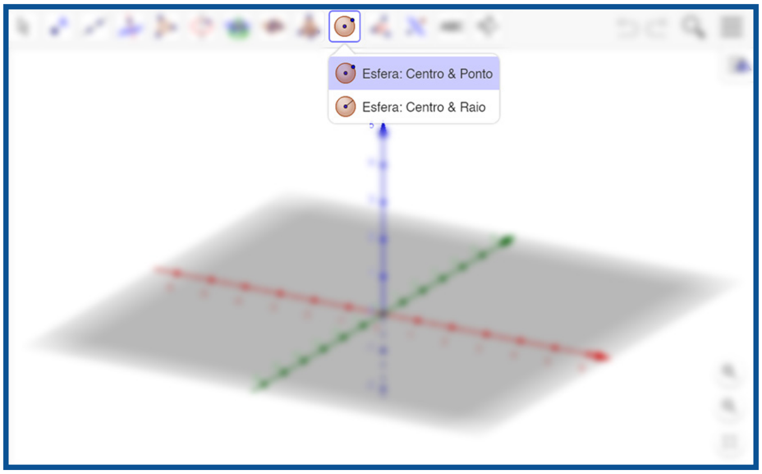
Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Com a ferramenta “**Pirâmide**” podemos criar uma pirâmide apenas desenhando um polígono, que será a base da pirâmide e, posteriormente selecionando um ponto de vértice; com a ferramenta “**Prisma**” podemos criar um prisma apenas desenhando um polígono, que será a base do prisma e, posteriormente selecionando um ponto para a base oposta; com a ferramenta “**Fazer extrusão para Pirâmide ou Cone**” podemos construir a partir de um polígono uma pirâmide reta e de um círculo um cone reto; com a ferramenta “**Extrusão para Prisma ou Cilindro**” podemos construir a partir de um polígono um prisma reto e de um círculo um cilindro reto.

Com a ferramenta “**Cone**” podemos construir um cone reto a partir do centro da base, do vértice e da escolha do raio da base; com a ferramenta “**Cilindro**” podemos construir um cilindro reto a partir do centro da base, do centro da base oposta e da escolha do raio; a ferramenta “**Tetraedro**” quando selecionada, constrói um tetraedro a partir da seleção de dois pontos da base; a ferramenta “**Cubo**” quando selecionada, assim como o tetraedro, constrói um cubo a partir da seleção de dois pontos da base e a ferramenta “**Planificação**” nos mostra a planificação a partir de um poliedro.

O ícone da ferramenta "**j**" contém duas ferramentas para a construção de esferas como mostra a figura seguinte.

Figura 29: Ícone Esfera da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.

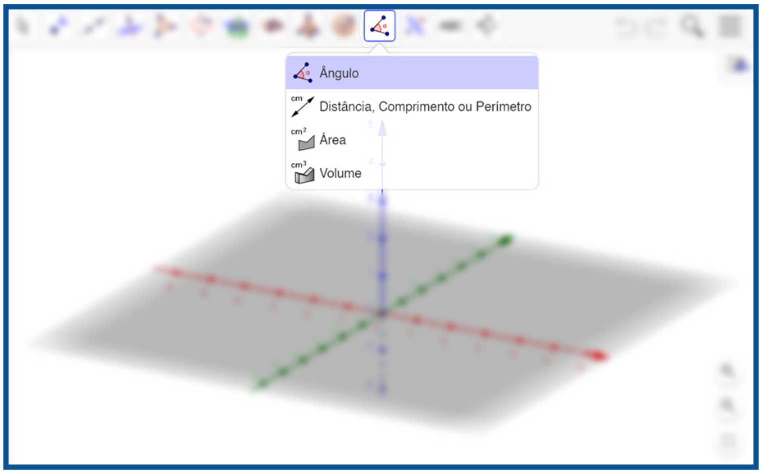


Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Com a ferramenta "**Esfera dados Centro e um de seus Pontos**" podemos construir uma esfera a partir da escolha do ponto que será seu centro e de um segundo ponto na esfera e, também, podemos criar uma esfera dados o ponto do centro e a medida do raio com a ferramenta "**Esfera dados Centro e Raio**".

O ícone da ferramenta "**k**" contém ferramentas que mostram a medida de ângulo, comprimento, área e volume. Como na figura a seguir.

Figura 30: Ícone Ângulo da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.

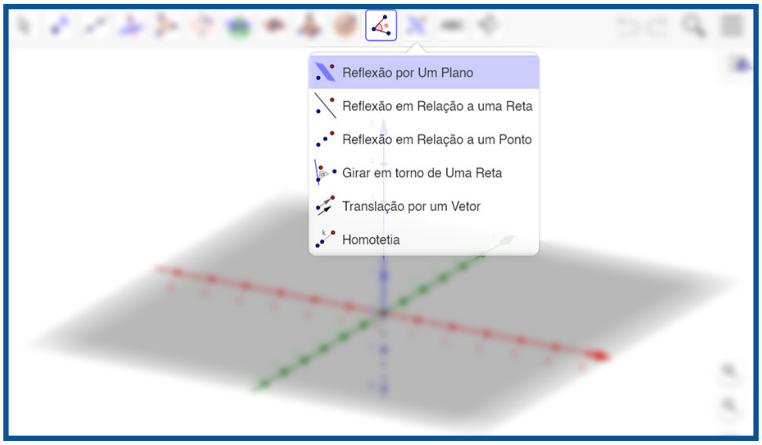


Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A novidade neste ícone de ferramentas e que corresponde aos sólidos geométricos é a ferramenta "**Volume**" que mostra o volume, automaticamente, do sólido selecionado e as demais ferramentas tem as mesmas funcionalidades da barra de ferramentas inicial.

O ícone da ferramenta "**l**" contém cinco ferramentas que também está na barra de ferramentas "**I**" da janela de visualização inicial, porém, a ferramenta "**Girar em torno de um Ponto**" na janela 3D é denominada "**Girar em torno de uma Reta**".

Figura 31: Ícone Reflexão da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.

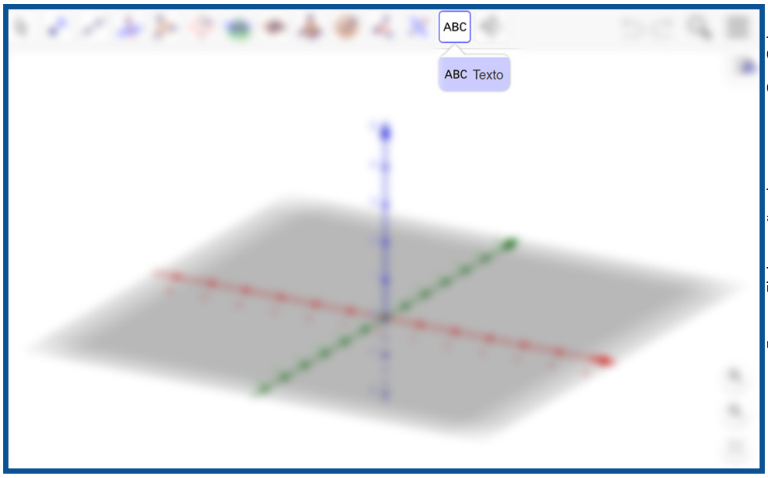


Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A ferramenta "**Reflexão por um Plano**" cria uma reflexão de um objeto por um plano selecionado.

O ícone da ferramenta "**m**" contém apenas a ferramenta "**Texto**", que como já vimos, serve para inserir um texto na janela de visualização.

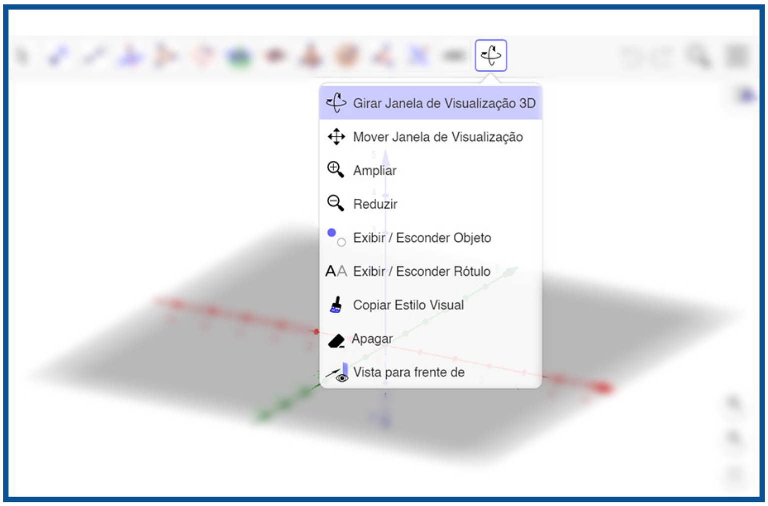
Figura 32: Ícone Texto da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

E o ícone da ferramenta "**n**" contém as sete ferramentas da barra de ferramentas "**K**" da janela de visualização inicial, porém, temos duas ferramentas a mais na janela 3D como vemos na imagem a seguir.

Figura 33: Ícone Girar da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A ferramenta "**Girar janela de Visualização 3D**" girar e arrasta a janela 3D e a ferramenta "**Vista para a frente de**" nos mostra a frente do objeto selecionado, ou seja, muda a vista.

7 Teclado Alfanumérico

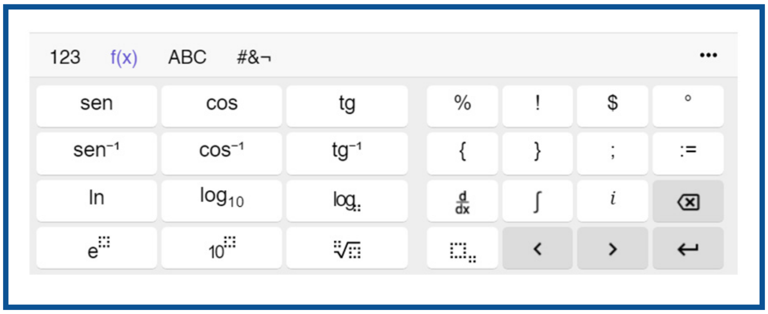
O "**Teclado 1**" que é mostrado na tela inicial do GeoGebra contém números e operadores básicos para cálculo de números e construção de funções matemáticas. Vide a figura a seguir.

Figura 34: Teclado numérico básico.

Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O "**Teclado 2**", quando selecionado nos traz opções para construção de funções trigonométricas, logarítmicas e exponenciais. Além de alguns operadores como podemos ver na figura a seguir.

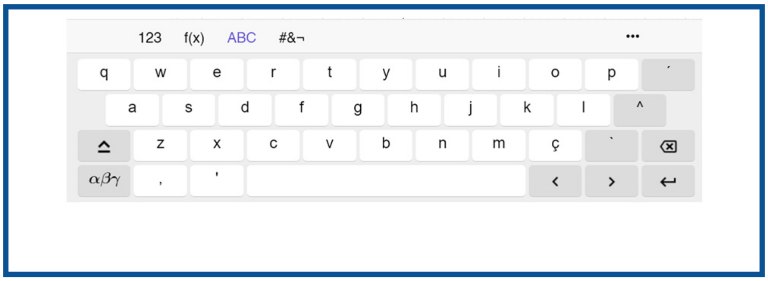
Figura 35: Teclado de funções.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O “**Teclado 3**” contém opções de letras do alfabeto para inserção de texto e símbolos como mostra a figura a seguir.

Figura 36: Teclado alfabético.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

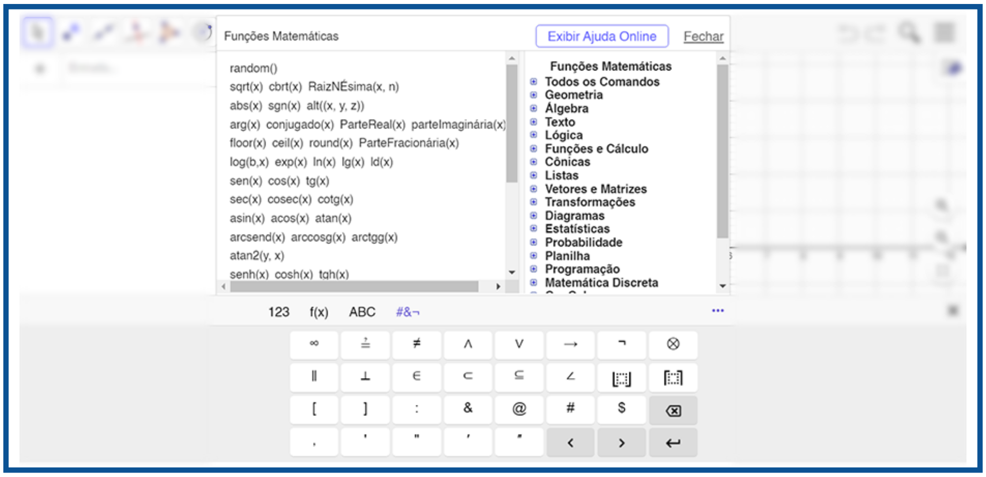
O “**Teclado 4**” contém letras do alfabeto grego para denominar algum plano, função, ângulo etc.

Figura 37: Teclado de Símbolos e operadores.

Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Além disso, podemos recorrer à ajuda sobre Funções Matemáticas gerais e escritas de Funções Matemática que se encontram no ícone localizado no teclado alfanumérico, como mostrado na figura a seguir:

Figura 38: Menu de Ajuda de Comandos.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O Teclado Alfanumérico é uma novidade nesta versão do GeoGebra, porém, se o usuário optar por usar o teclado do PC ou Notebook não há restrições, pois o Teclado Alfanumérico do GeoGebra serve como auxílio, principalmente, para os aplicativos voltados para celulares.

8 Barra de seleção direta de Janelas

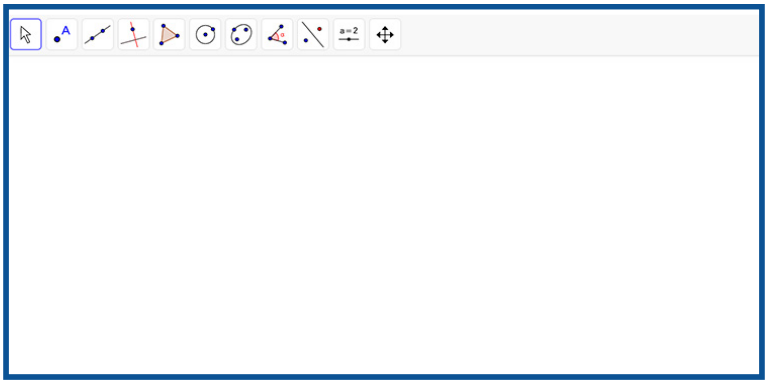
A Barra de Seleção direta de Janelas é exibida somente ao iniciar o GeoGebra e tem as opções de abrir janelas, como vemos na figura a seguir.

Figura 39: Seleção direta de janelas.

Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A opção "**Gráfico**" já está na janela inicial, pois se trata da Janela de Álgebra, ou seja, não muda as janelas iniciais e a opção "**Geometria**" abre uma janela de visualização em branco como na figura a seguir.

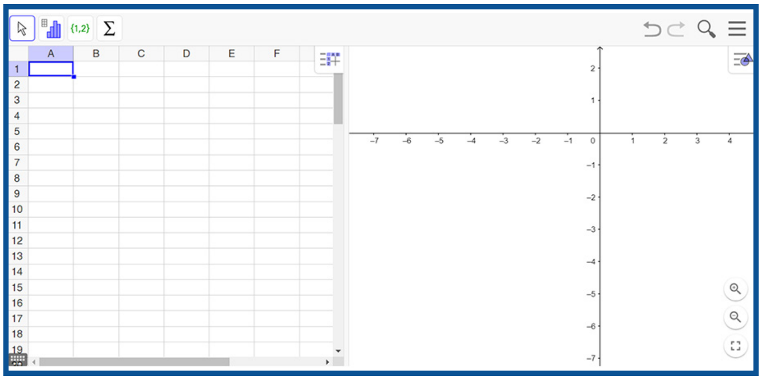
Figura 40: Janela de Geometria.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A opção "**Janela 3D**" substitui a Janela de Visualização inicial, mostrando assim, somente a Janela de Álgebra e Janela 3D; a opção "**Janela CAS**" abre a Janela CAS e a Janela de Visualização 2; a opção "**Planilha de Cálculos**" abre a Planilha de Cálculos e a Janela de Visualização 2 como mostra a figura a seguir.

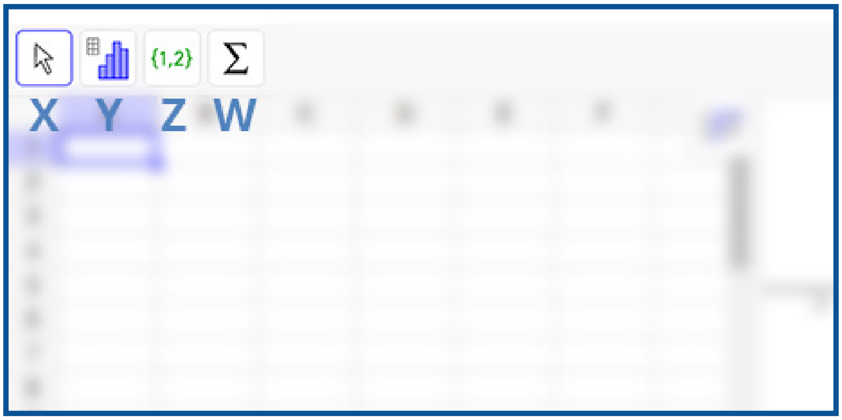
Figura 41: Planilha de Cálculos.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A Janela da "**Planilha de Cálculos**" mostra a seguinte barra de ferramentas:

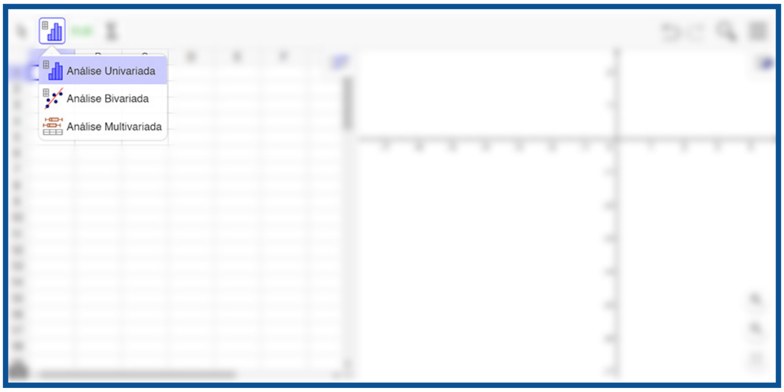
Figura 42: Ícones de Ferramentas da Planilha de cálculos.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A ferramenta "**X**" contém apenas a opção de selecionar um objeto da planilha. Ao selecionar o ícone de ferramentas "**Y**" temos as ferramentas: "**Análise Univariada**" que faz uma análise dos valores numéricos em um bloco de células e constrói automaticamente um Diagrama de barras, que pode ser alterado para Histograma ou Boxplot, além disso, a janela do gráfico de barras traz algumas opções de visualização; com a ferramenta "**Análise Bivariada**" ao selecionar pares de valores em um bloco de células constrói-se um Modelo de Regressão (Scatterplot ou Diagrama de resíduos) com algumas opções de visualização e com a ferramenta "**Análise Multivariada**" ao selecionar dois ou mais blocos de colunas cria-se blocos de estatística com resultados de Média, Mediana, Máximos e Mínimos.

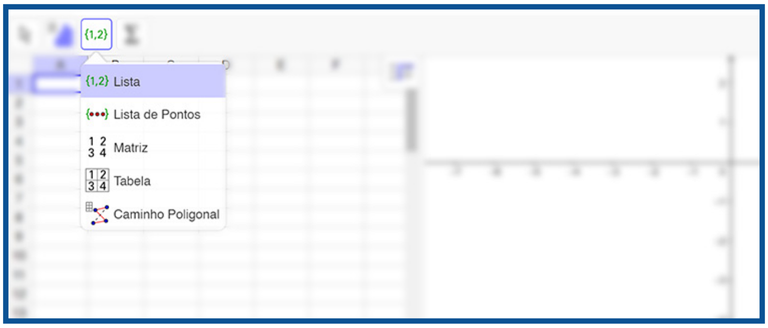
Figura 43: Ícone Análise da Planilha de cálculos.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O ícone da ferramenta "**Z**" contém ferramentas muito úteis para o estudo de sequências e matrizes. Com a ferramenta "**Lista**" cria uma lista de pontos criados na planilha, selecionando-se por linha ou coluna; com a ferramenta "**Lista de Pontos**" faz o mesmo que a ferramenta Lista, porém, já fixa seus pontos na janela de visualização; com a ferramenta "**Matriz**" cria uma matriz a partir das células selecionadas na planilha; com a ferramenta "**Tabela**" podemos criar uma tabela que será apresentada na janela de visualização e a ferramenta "**Caminho por Polígonos**" cria um caminho poligonal pelos pontos selecionados nas células da planilha.

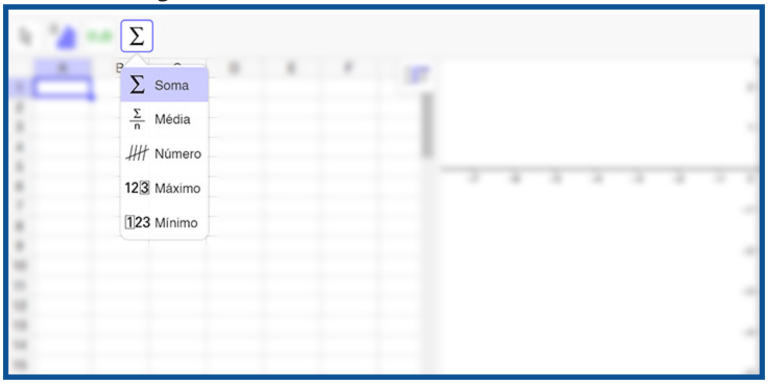
Figura 44: Ícone Lista da Planilha de cálculos.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O ícone de ferramentas “**W**” contém algumas ferramentas de contagem. Nesse contexto, com a ferramenta “**Soma**” podemos calcular a soma automática das linhas ou colunas das células selecionadas; com a ferramenta “**Média**” podemos calcular a média aritmética das linhas ou colunas das células selecionadas; com a ferramenta “**Número**” ao selecionar linhas ou colunas apresentar-se-á a quantidade de elementos selecionados; com a ferramenta “**Máximo**” mostrar-se-á o valor máximo entre as células selecionadas e com a ferramenta “**Mínimo**”, o valor mínimo entre as células selecionadas.

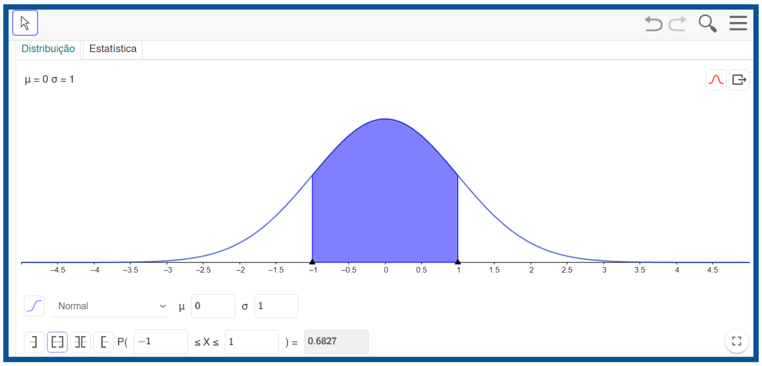
Figura 45: Ícone Soma da Planilha de cálculos.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A opção “**Probabilidade**” abre apenas a Janela de probabilidade como vemos na figura a seguir.

Figura 46: Janela da Calculadora de Probabilidades.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

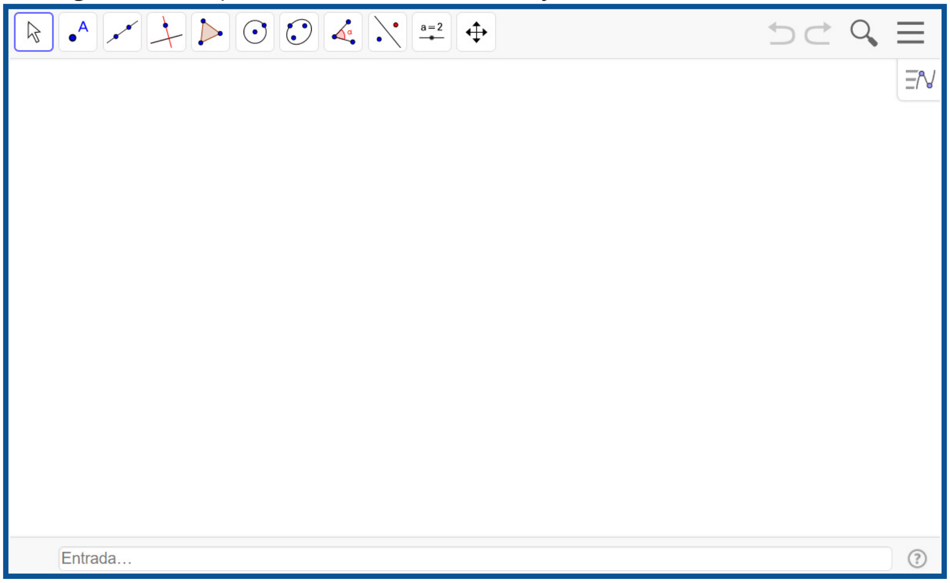
E a opção “**Modo Exame**” é outra novidade nesta versão, pois ela serve para fazer um histórico da atividade feita no GeoGebra e a opção “**Download**” abre uma segunda janela do GeoGebra para baixar aplicativos.

9 Barra de Menu

A Barra de Menu traz opções de acesso como: Arquivo, traz opções com relação ao arquivo construído (novo, abrir, gravar, exportar imagem, compartilhar, baixar e visualizar Impressão); Editar, oferece opções de edição do arquivo que está sendo construído (desfazer, refazer, selecionar tudo, opções de configuração, copiar e colar); Disposições, Mostra todas as janelas disponíveis e, se selecionada, abrir-se-á somente a janela selecionada (Gráficos, Janela CAS, Geometria, Janela 3D, Planilha de Cálculos, Probabilidade e Modo Exame); Exibir, traz as opções de exibição contidas nas "Disposições" numa mesma área de trabalho, podendo exibir todos ao mesmo tempo, além dessas opções podem ser incluídas: Janela de Visualização 2, Protocolo de Construção, Campo de Entrada, Atualizar Janelas e Recalcular todos os Objetos.

O "**Campo de Entrada**" localizado na opção "**Exibir**" da Barra de Menu tem como finalidade e entrada de funções e comandos, como mostrado na figura a seguir. E todos os comandos estão descritos no "Menu de Ajuda sobre Funções Matemáticas" da figura anterior.

Figura 47: Campo de Entrada com Menu de Ajuda sobre Funções Matemáticas.

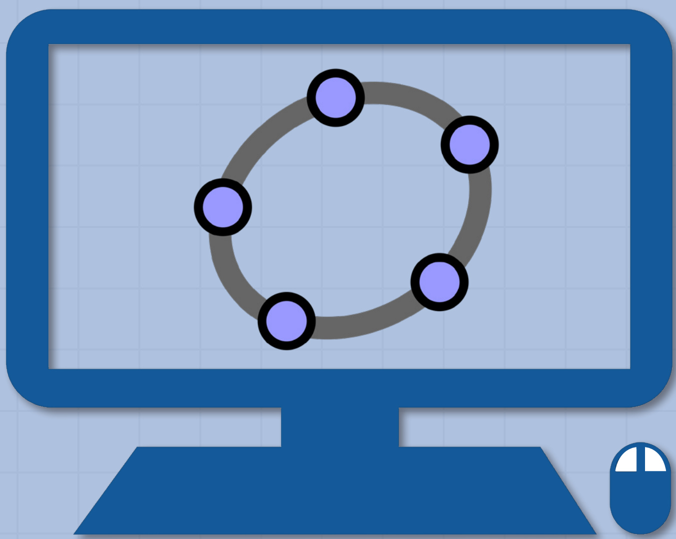


Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Na mesma Barra de Menu contém, também, opções de Configuração, que podem ser de Álgebra, básicos ou global; opções de Ferramentas, onde podemos configurar, criar e gerenciar ferramentas; opções de Ajuda, com tutoriais, manual, fórum, reportar erro e informações sobre a licença e a opção Entrar serve para que o usuário entre na comunidade GeoGebra e possa compartilhar seu arquivo pronto, como jogo, sequência didática etc.

Unidade 5

Tarefas Propostas com Auxílio do GeoGebra



1 Tarefas propostas com auxílio do GeoGebra

A tarefas descritas que seguem foram elaboradas para que o estudante comece a se familiarizar com as equações polinomiais do 2º grau e com o GeoGebra. Estas tarefas poderão servir de apoio para o desenvolvimento do objeto de conhecimento pelo professor e, que se aplicadas com seus estudantes possibilitará o desenvolvimento da habilidade pretendida.

O objeto de conhecimento das cinco sequências de tarefas será a "Equação polinomial de 2º grau do tipo $\mathrm{ax}^2 = \mathrm{b}$". E busca desenvolver a habilidade de código EF08MA09: Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $\mathrm{ax}^2 = \mathrm{b}$.

São cinco sequências de tarefas que o professor, conforme a adoção de uma metodologia, poderá aplicar em sala de aula com seus estudantes. O que possibilitará aos estudantes o desenvolvimento da habilidade EF08MA09.

2 Primeira Sequência de Tarefas

O objeto de conhecimento abordado será a equação polinomial de 2º grau do tipo , do qual o estudante desenvolverá a habilidade (EF08MA09): Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$. O objetivo de aprendizagem será resolver equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ no GeoGebra, dados os conteúdos de conhecimento prévio: equações, área do retângulo, área do quadrado e operações algébricas.

> Esta primeira Sequência de Tarefas está composta por 6 tarefas e suas respectivas resoluções. As resoluções realizadas no GeoGebra são sugestivas e podem sofrer mudanças conforme os objetivos estabelecidos pelo professor.

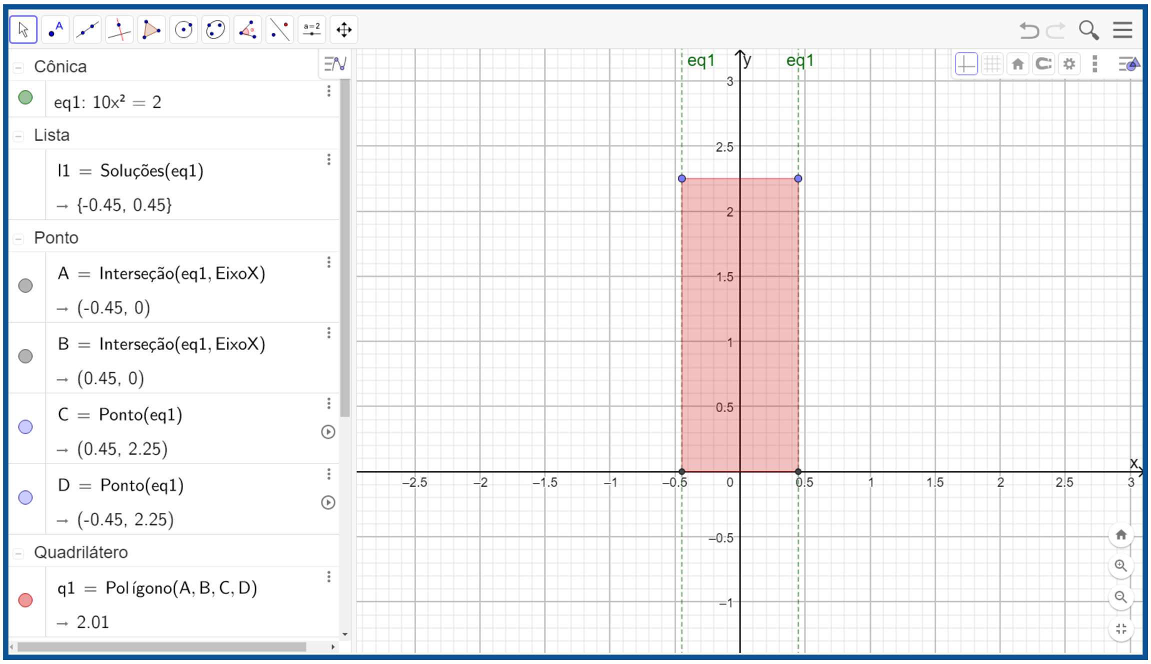
Tarefa 1

Uma colcha com 10 retalhos quadrangulares idênticos possui uma superfície de $2\mathrm{m}^2$. Qual é a medida do lado de cada retalho?

Resolução

A partir da leitura do problema, o que se pede é a medida do lado de um dos 10 retalhos. Utilizando a janela 2D do GeoGebra podemos desenhar um retângulo utilizando o ícone [Polígono]. Basta abrir a janela de visualização 2D do GeoGebra e, utilizando apenas a Malha da janela, o estudante deve fazer um retângulo com 10 quadrados.

Figura 48: Colcha de retalhos em forma retangular no GeoGebra.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Portanto, como a colcha possui 10 retalhos quadrangulares que tem áreas iguais a e a sua área total é de , teremos:

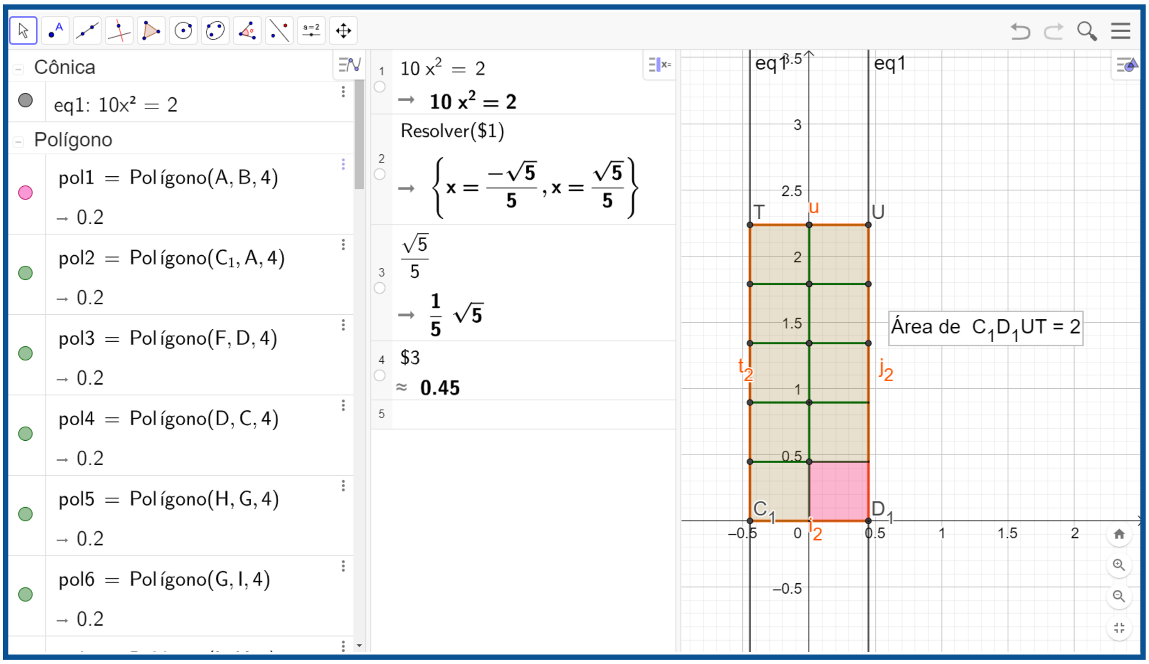
$$10x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{2}{10} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \sqrt{\frac{2}{10}} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{2}{10}}$$

Neste caso, ao fazer a divisão de 2 por 10 não facilitará os cálculos e, neste caso, teríamos $\sqrt{\frac{2}{10}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$ seguindo a generalização, resultando na estratégia para encontrar as raízes quadradas de 2 e 10. Por outro lado, as raízes $x = \sqrt{0,2} \; ou \; x = -\sqrt{0,2}$ também são aceitas, porém, o lado do retalho quadrangular é igual a $\sqrt{0,2m} \approx 0,45m = 45cm$

Este cálculo é facilmente resolvido no GeoGebra ao inserir a equação $10x^2 = 2$ no campo de entrada e utilizar o comando Resolver "(<Equação>)" ou "Soluções(< Equação >)". E, também é possível trabalhar o redimensionamento da figura retangular, com o cálculo da raiz $\sqrt{0,2}$ e com o sistema de medidas de comprimento para a verificação do resultado.

Outra maneira de resolver o problema, seria utilizando as janelas de álgebra, CAS e de visualização 2D. E, utilizando apenas o comando “Resolver” na janela CAS obtém-se o resultado ou introduzindo o modelo matemático na janela de álgebra, em que, de forma automática, aparecem as retas na janela 2D, o que possibilita aos estudantes a verificação por meio dos comandos “Polinômio” e “Área” o resultado.

Figura 49: Colcha de retalhos em três janelas do GeoGebra.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Com relação à mudança de cores dos objetos inseridos na janela 2D, fica a critério do professor ou da exigência da tarefa.

Tarefa 2

Um tapete possui uma área quadrada de 5 m^2. Qual é a medida aproximada do lado deste tapete?

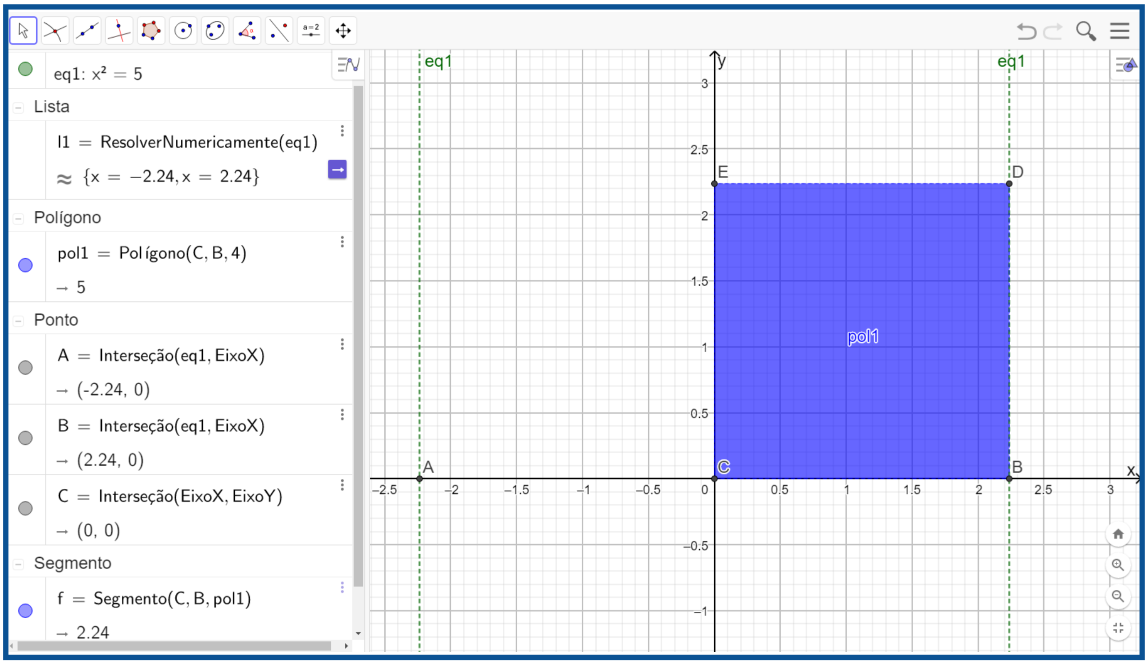
A partir da leitura do problema, o que se pede é a medida do lado de um quadrado cuja área é de 5 m^2. Assim, calculamos as raízes da mesma maneira e, podendo utilizar os comandos Resolver "(<Equação>)" ou "Soluções(< Equação >)" ou "ResolverNumericamente(<Equação>)". Desse modo, ao realizar os cálculos considerando x^2 a área do tapete, teremos:

$$x^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{5} \ ou \ x = -\sqrt{5}$$

Aproximando o valor da raiz positiva, temos que o lado do tapete mede 2,24m. Uma maneira de verificar o resultado é inserindo a equação $x^2 = 5$ no campo de entrada, posteriormente, digitar o comando ResolverNumericamente(<Equação>) e selecionar o ícone Interseção de Dois Objetos para fazer a interseção entre as retas "eq1", que são paralelas ao "EixoY", com o "EeixoX" gerando os pontos de interseção "A" e"B".

Utilizando, ainda, a janela 2D podemos desenhar um quadrado utilizando o ícone Polígono Regular, escolhendo o ponto de origem, ponto "C", e um dos dois pontos gerados pela interseção na janela 2D e, posteriormente, escolher a quantidade de vértices do polígono e clicar em "OK". Assim, verificaremos por meio dos dados na janela de álgebra que o polígono tem área 5 e o seguimento (lado do quadrado) tem comprimento 2,24.

Figura 50: Resolução com o comando "Resolver Numericamente" a equação.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Tarefa 3

Numa fazenda há 3 celeiros quadrados de mesma área para guardar arroz, feijão e trigo, ocupando uma área total de 300 m². Qual é a medida do lado do celeiro destinada para o armazenamento do arroz?

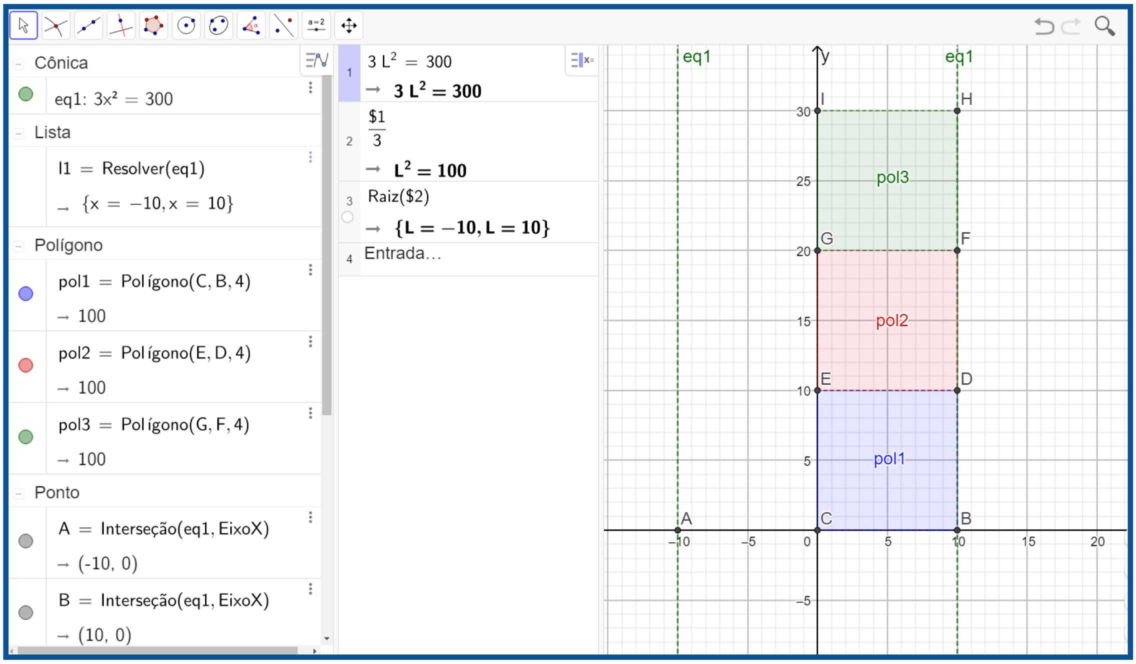
Resolução

Pela leitura do problema, como são 3 áreas de quadrados iguais e a soma dessas áreas é , então temos de resolver a equação $3L^3 = 300$. Para resolver os cálculos e encontrar o valor de L, basta utilizar alguns passos na janela CAS e realizar os seguintes cálculos:

$$3L^2 = 300 \quad \Rightarrow \quad L^2 = \frac{300}{3} \quad \Rightarrow \quad L^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad L = \pm\sqrt{100} \quad \Rightarrow \quad L = \pm 10$$

Assim, basta abrir a janela CAS, inserir a equação $3L^3 = 300$ na linha 1 e apertar a tecla. Na linha 2, ao digitar $1/3 teremos uma simplificação da equação e, por fim, poderemos utilizar o comando Raiz(<Polinômio>), em que o polinômio será a equação resultante na linha 2, lembrando sempre de apertar a tecla ao final de cada processo.

Figura 51: Resolução com o comando “Raíz” na janela CAS do GeoGebra.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O símbolo de cifrão fixa os dados da linha desejada. Para esta tarefa poderíamos ter pulado o passo feito na linha 2 e fazer logo após a entrada da equação na linha 1 o comando Raiz(<Polinômio>). Portanto, a medida do lado do celeiro de arroz é igual a $10\ \mathrm{m}$, pois, L não pode ser um valor negativo.

Tarefa 4

Um quadrado de lado L possui determinada área. Ao adicionar dois metros no lado desse quadrado, sua área é de $121\ \mathrm{m}^2$. Qual é a área do quadrado de lado L ?

Resolução

Se L é o lado do quadrado, então temos:

$$(L+2)^2 = 121 \quad \Leftrightarrow \quad (L+2)^2 = 11^2$$
$$L+2 = 11 \ \text{ ou } \ L+2 = -11$$
$$L = 9 \ \text{ ou } \ L = -13$$

Novamente temos o lado do quadrado como um valor positivo, então o lado é 9. A área do quadrado é $L^2 = 9^2 = 81$.

Tarefa 5

Um terreno tinha um formato quadrangular com $40\ \mathrm{m}$ de lado. O dono do terreno precisa fazer uma alteração para que ele passe a ter apenas $1200\ \mathrm{m}^2$ de área. Para isso, achou viável reduzir a largura e aumentar o comprimento no mesmo valor. Observe o esquema que foi feito para atender o que se queria:

a) Escreva uma equação que represente a situação descrita.

b) Utilizando a propriedade distributiva, desenvolva a equação.

c) É possível encontrar uma equação equivalente a essa na forma $x^2 = b$, onde é um número real?

d) Quais são os possíveis valores para x?

Resolução

a) Escreva uma equação que represente a situação descrita.

$(40 - x)(40 + x) = 1200$

b) Utilizando a propriedade distributiva, desenvolva a equação.

$(40 - x)(40 + x) = 1200$
$1600 + 40 - 40x - x^2 = 1200$
$1600 - x^2 = 1200$

c) É possível encontrar uma equação equivalente a essa na forma $x^2 = b$, onde b é um
número real?

$1600 - x^2 = 1200$
$1600 - 1200 = x^2$
$400 = x^2$

Onde $a = 1$ e $b = 400$

d) Quais são os possíveis valores para x?

$x^2 = 400$
$x = \sqrt{400}$ ou $= -\sqrt{400}$
$x = 20$ ou $x = -20$

Podemos interpretar o valor negativo como indo na direção oposta. Desta forma, teríamos uma solução em que obteríamos um retângulo horizontal quando $x = 20$ e um retângulo vertical quando $x = -20$.

Tarefa 6

A área de um círculo é de 12,56 cm^2. Encontre o raio desse círculo considerando $\pi = 3{,}14$.

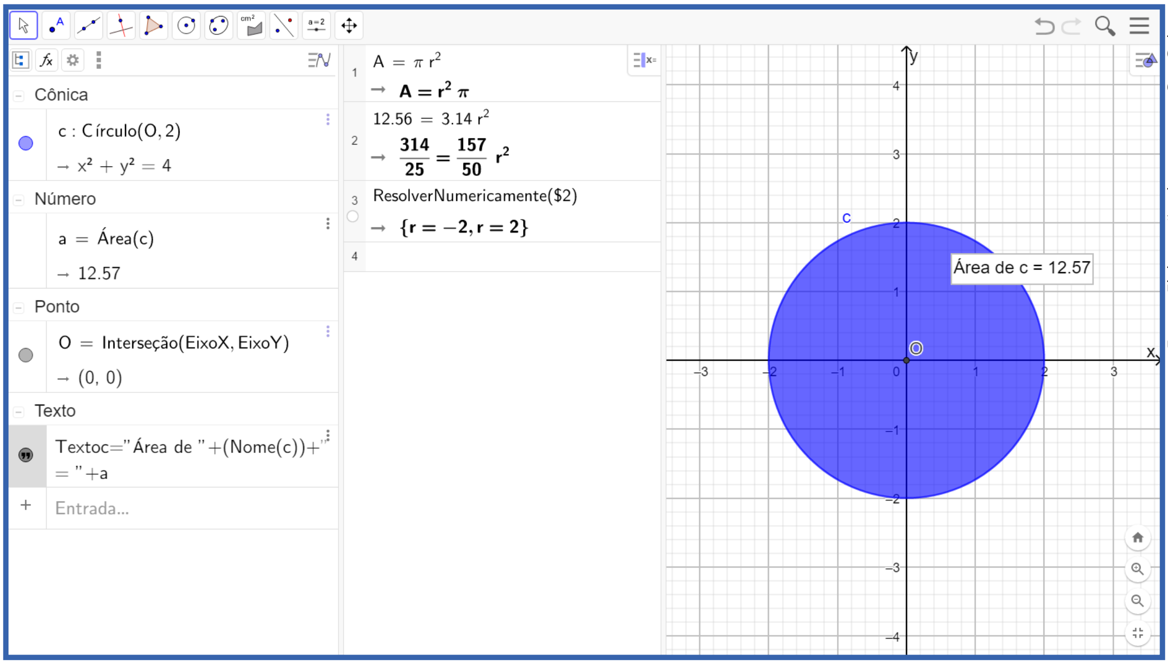
Resolução

A área do círculo é dada por $A_c = \pi \cdot r^2$, em que $A_c = 12{,}56,\ \pi = 3{,}14$ e r é o raio, cujo valor deverá ser encontrado. Portanto, ao fazer as substituições na expressão $A_c = \pi \cdot r^2$, temos:

$$\pi \cdot r^2 = 12{,}56 \ \Rightarrow \ 3{,}14 \cdot r^2 = 12{,}56 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ r^2 = \frac{12{,}56}{3{,}14} \ \Rightarrow \ r^2 = 4 \ \Rightarrow \ r = 2\ cm \ \text{ ou } \ r = -2cm$$

Como o raio é uma medida positiva, então esse círculo possui um raio de 2 cm. Estes cálculos são facilmente realizados no GeoGebra e, para tanto, basta inserir a equação e substituir os valores aproximados da área e do $\pi(pi)$, dados no problema. Ao resolver utilizando o comando ResolverNumericamente(<Equação>) teremos os valores para r, porém, é considerado apenas o valor positivo r = 2.

Figura 52: Cálculo algébrico da área do círculo no GeoGebra.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Para verificar a resposta, deve-se selecionar o ícone círculo dados centro e raio 

e escolher o raio igual a 2. Desse forma, será criado um círculo de raio 2 na janela 2D. E, para calcular a área do círculo utilizamos o ícone 

e clicamos em cima do círculo, do qual, queremos calcular a área. A área será apresentada em forma de texto ao lado do objeto escolhido.

Percebe-se pela resolução com auxílio do GeoGebra que o cálculo algébrico envolvendo conceitos e figuras geométricas podem e devem ser trabalhadas em sala de aula. Assim, o professor pode colocar à disposição dos seus alunos as possibilidades para o desenvolvimento das habilidades sobre o cálculo algébrico relacionado à geometria plana.

3 Segunda Sequência de Tarefas

O objeto de conhecimento abordado será a equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$, do qual o estudante desenvolverá a habilidade (EF08MA09): Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$. O objetivo de aprendizagem será resolver equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ no GeoGebra, dados os conteúdos de conhecimento prévio: equações, área do quadrado, contagem e operações algébricas.

> Esta primeira Sequência de Tarefas está composta por 5 tarefas e suas respectivas resoluções. As resoluções realizadas no GeoGebra são sugestivas e podem sofrer mudanças conforme os objetivos estabelecidos pelo professor.

Tarefa 1

Perceba o seguinte padrão em relação aos números ímpares:

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

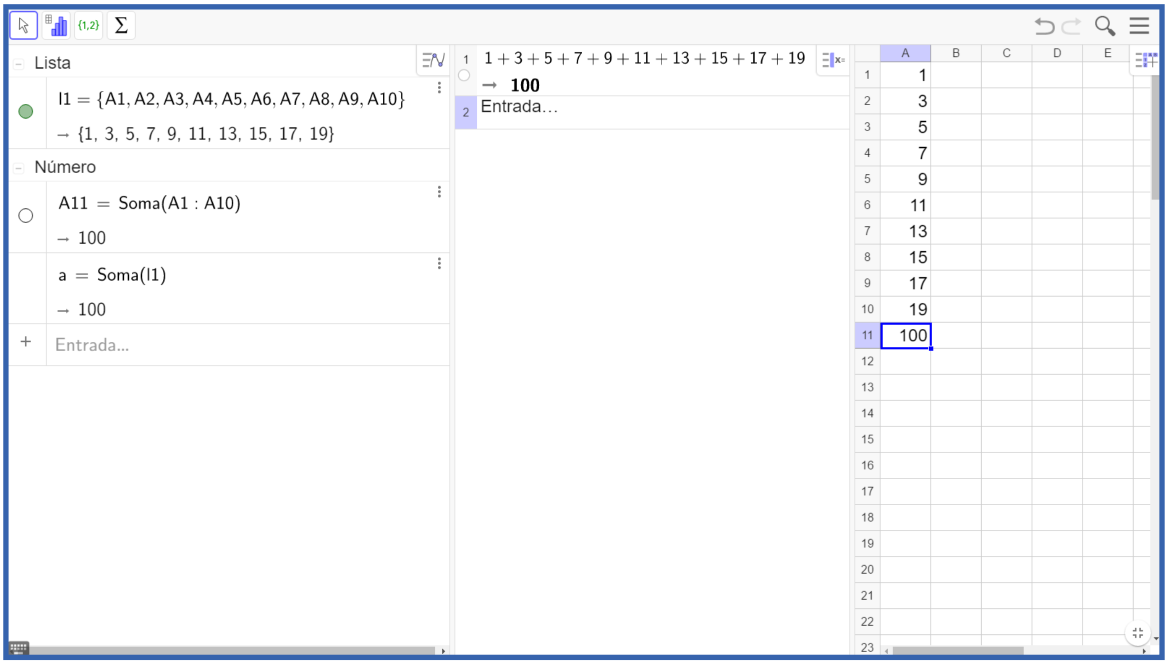
Qual será a soma dos dez primeiros números ímpares?

Resolução

Na leitura do problema, os estudantes deverão perceber que a soma dos números ímpares consecutivos sempre gera um número quadrado perfeito. A soma dos dois primeiros números ímpares será 2^2, a soma dos três primeiros números ímpares será 3^2, a soma dos quatro primeiros números ímpares será 4^2. Portanto, seguindo este raciocínio, a soma dos dez primeiros números ímpares será 10^2 que igual a 100.

Há algumas ferramentas no GeoGebra que podem ser utilizadas. Na janela CAS, o estudante pode continuar a sequência de números ímpares, somando-os como numa calculadora. Uma maneira que exige um pouco mais de habilidade seria digitar todos os 10 primeiros números ímpares na , criar uma lista de números e, posteriormente, utilizar o comando Soma(<lista>) como na figura, ou o ícone $\boxed{\sum}$ que fará a soma apenas na planilha.

Figura 53: Comando "Soma" e criação de lista com planilha no GeoGebra.

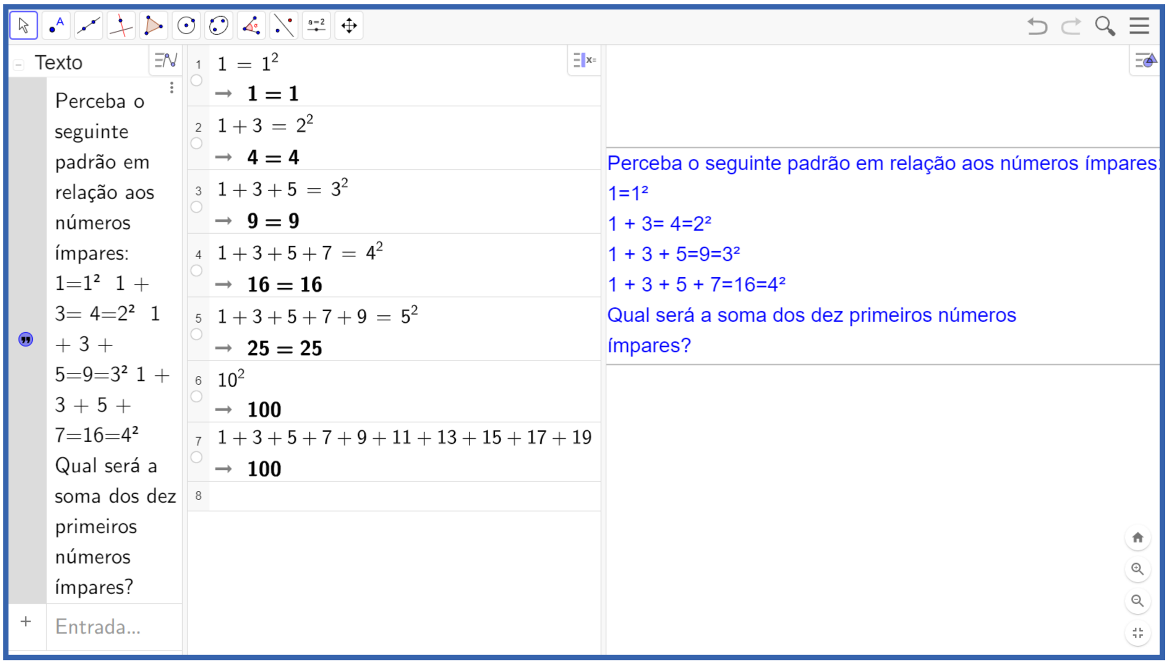


Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Para criar uma lista de números basta selecionar a coluna ou linha de números na planilha, dar um click no botão direito do mouse, ir em Criar e depois selecionar Lista, ou o ícone {1,2} que criará uma lista com os números selecionados na planilha. A lista aparecerá na janela de álgebra.

Outra maneira dos estudantes resolverem o mesmo problema seria realizando os cálculos diretamente na janela CAS em sequência até encontrar o valor procurado. O professor também pode fazer com que os estudantes percebam a regularidade que aparece nas somas.

Figura 54: Cálculo direto na janela CAS do GeoGebra.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Dessa forma, o professor pode trabalhar a leitura de recorrências e até mesmo potenciação e cálculos envolvendo números ímpares, para então, chegar a uma generalização dos cálculos fazendo com que os estudantes percebam e desenvolvam o pensamento algébrico.

Tarefa 2

Três caminhões irão transportar 108 mesas quadradas com 1 metro de lado. Todos eles sairão com sua capacidade máxima, sem colocar nenhuma mesa em cima da outra. Sabendo que as caçambas de cada caminhão são iguais e possuem a mesma medida em cada dimensão, qual a altura das caçambas?

Resolução

$$3x^2 = 108 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{108}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 36$$

$$x = \sqrt{36} \;\text{ ou }\; x = -\sqrt{36}$$

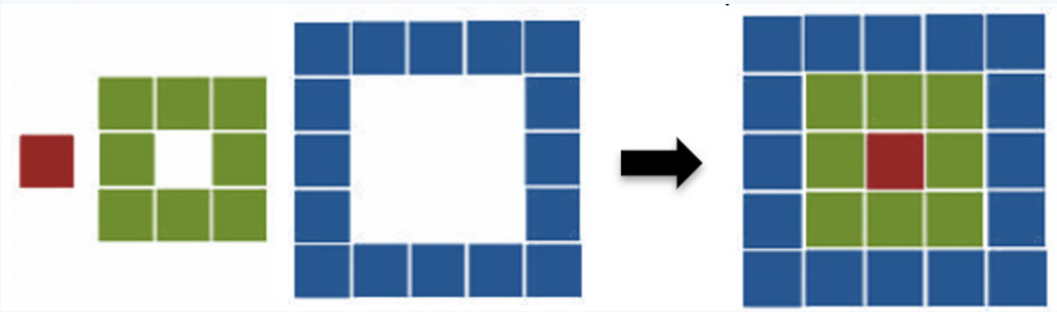
$$x = 6 \;\text{ ou }\; = -6$$

Como só pode ser a medida da altura, só pode ser o valor positivo.

Tarefa 3

Usando pastilhas de cerâmica na forma de quadradinhos, foi composta uma decoração numa parede em três peças, sendo uma peça vermelha com 1 quadrado, uma peça verde com 9 quadrados e uma peça azul com 16 quadrados, como mostrado na figura a seguir.

Figura 55: Pastilhas de cerâmica quadradas.



Fonte: Adaptado de nova escola

Sabendo que no total foram empregadas 121 pastilhas em toda a decoração, quantas pastilhas foram utilizadas na última peça?

Resolução

Veja que se encaixarmos as peças menores nas peças maiores obteremos um quadrado maior teremos 25 pastilhas tendo em cada lado 5 pastilhas. Repare também, que os lados seguem uma sequência numérica ímpar (1, 3, 5, ...).

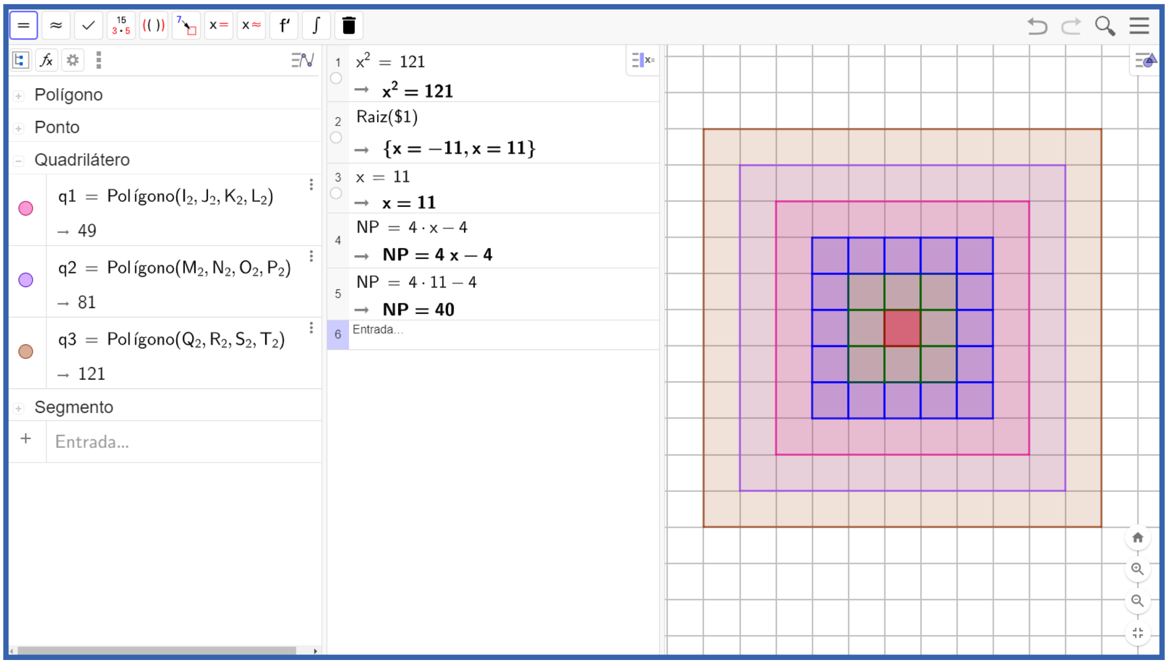
Seja o número de pastilhas que compõem o lado desse quadrado maior, que também será o lado do quadrado que forma a última peça, então temos que:

$$x^2 = 121 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{121} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 11$$

Agora, perceba que o número de pastilhas utilizadas nessa última peça pode ser escrito como quatro vezes o número de peças que forma os lados, mas assim contaremos as quatro quinas duas vezes, portanto, se é o número de pastilhas que compõe o lado do quadrado, então temos que o número de pastilhas que forma a última peça é $N_p = 4x - 4$ (N_p é o número de pastilhas), que nesse caso será $N_p = 4 \cdot 11 - 4 = 40$. Assim, teremos 40 pastilhas na última peça.

Ao utilizar o GeoGebra na resolução deste problema, tanto para a resolução algébrica quanto para verificação geométrica, as janelas CAS e 2D são suficientes. Primeiro calculamos as raízes e depois como chegamos à expressão $N_p = 4x - 4$.

Figura 56: Pastilhas de cerâmica quadradas no GeoGebra.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Tarefa 4

Resolva o problema a seguir utilizando palavras, uma representação gráfica e uma representação algébrica: "Para construir 3 paredes quadradas do seu banheiro, Karina precisou de 27 azulejos de 1 m² cada um. Qual é a medida da altura do banheiro de Karina?"

Resolução

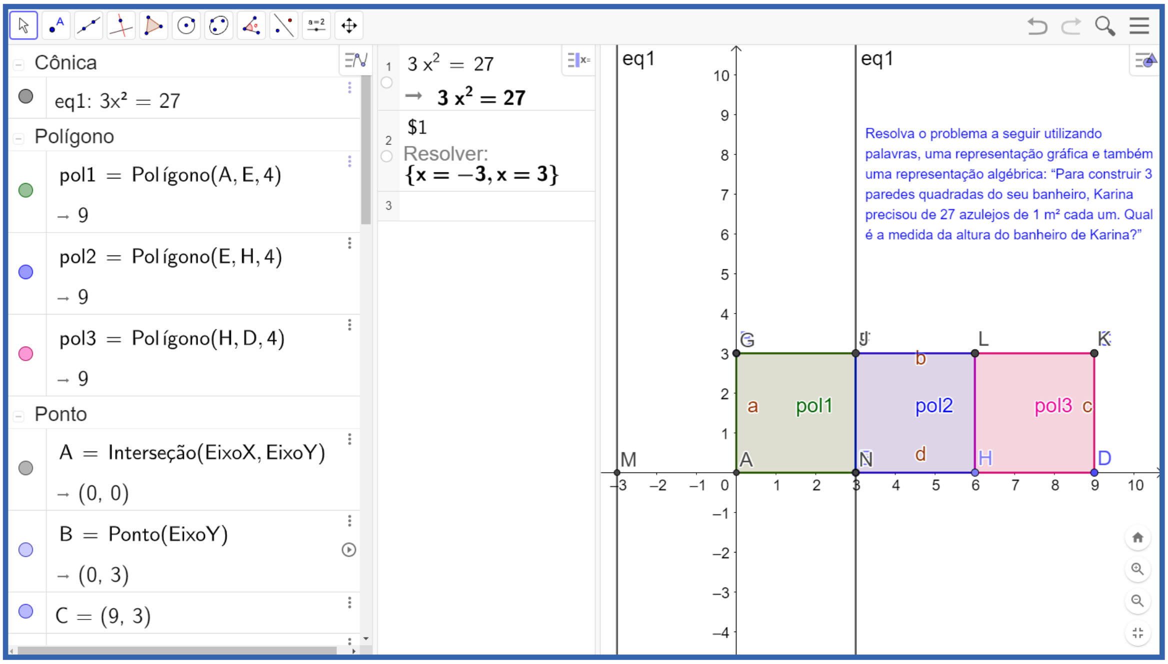
A resolução do problema pode ser feita de forma rápida utilizando apenas a janelas CAS, porém, para completar as demais etapas da ASPM é necessário utilizar as janelas de álgebra e 2D.

$$3x^2 = 27 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{27}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 9$$

$$x = \sqrt{9} \text{ ou } x = -\sqrt{9}$$

$$x = 3 \text{ ou } x = -3$$

Figura 57: Resolução da medida da moldura do banheiro no GeoGebra.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Como se trata de uma situação do cotidiano, a resposta não pode ser um número negativo. Por isso, a resposta seria .

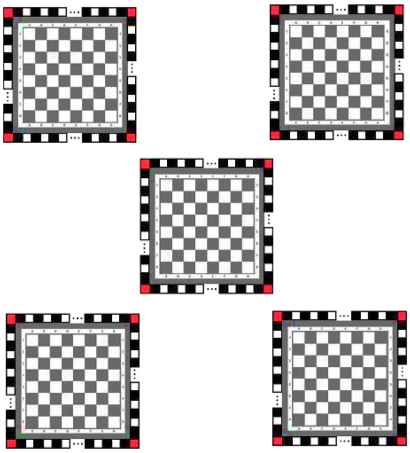
Tarefa 5

Em uma praça o prefeito decidiu colocar pequenos ladrilhos para contornar as 5 mesas de xadrez. Sabendo que as 5 mesas ocupam, no total, uma área de 1250 cm^2, quantos centímetros de ladrilho ele precisará?

Resolução

Primeiro faça um esboço da situação para compreender melhor o que está sendo falado no problema.

Figura 58: Ladrilhos nos tabuleiros de xadrez.



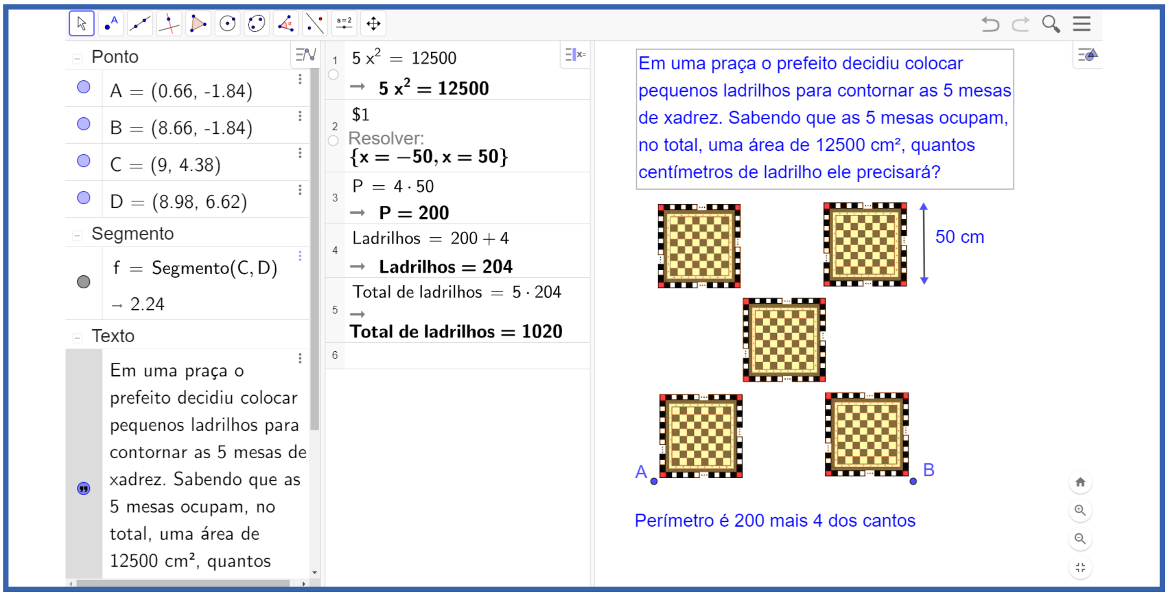
Fonte: nova escola

Observe que os quadriculados em volta são apenas os ladrilhos que serão colocados para o enfeite. Vale ressaltar que isto é apenas um esboço e, por isso, não está condizente com a realidade. O desenho está fora de escala.

Para resolver essa questão precisamos notar que quando formos cobrir cada tabuleiro, será necessário calcular o lado de cada um deles. Entretanto, como vamos colocar ladrilhos nesta figura, os cantos não estariam sendo medidos. Neste caso, ao final seria necessário adicionar 4 ladrilhos (que vão se posicionar nos cantos) para contornar totalmente o tabuleiro.

Ainda não sabemos o lado de cada tabuleiro, porém, podemos considerar que essa medida seja igual a alguma letra de sua escolha. No nosso caso, optamos por L como sendo esse valor.

Figura 59: Resolução do problema do tabuleiro de xadrez no GeoGebra.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Desta forma, temos que a área de cada tabuleiro pode ser determinada por L^2. Sabendo disso, as 5 mesas de tabuleiros totalizam $5L^2$. Com isso podemos escrever a equação da seguinte maneira: $5L^2 = 12500$.

Resolvendo esta equação, temos:

$$5L^2 = 12500 \quad \Leftrightarrow \quad L^2 = \frac{12500}{5} \quad \Leftrightarrow \quad L^2 = 2500$$

Se a área de cada um dos tabuleiros é igual a 2500, devemos procurar um número positivo que elevado ao quadrado seja igual a 2500. Este número só pode ser o 50. Isto significa que o lado de cada um dos tabuleiros é igual a 50 cm.

A partir daí, chegamos à conclusão de que o perímetro de cada tabuleiro é igual a $4 \cdot 5$, ou seja, 200 cm. Por isso, teríamos que colocar, em cada tabuleiro, 200 ladrilhos mais os 4 ladrilhos dos cantos, ou seja, 204 ladrilhos. Como são 5 mesas de tabuleiro, serão necessários $5 \cdot 204 = 1020$ ladrilhos no total.

Nesta sequência de tarefas percebe-se algumas semelhanças entre cada uma das tarefas de a compõe, apesar disso, necessitam de mais ações e operações para que alunos consigam resolver o problema. Configurando, assim, maior complexidade se comparada a primeira sequência de tarefas.

4 Terceira Sequência de Tarefas

O objeto de conhecimento abordado será a equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$, do qual o estudante desenvolverá a habilidade (EF08MA09): Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$. O objetivo de aprendizagem será resolver equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ no GeoGebra, dados os conteúdos de conhecimento prévio: equações, pensamento algébrico e operações algébricas.

> Esta primeira Sequência de Tarefas está composta por 6 tarefas e suas respectivas resoluções. As resoluções realizadas no GeoGebra são sugestivas e podem sofrer mudanças conforme os objetivos estabelecidos pelo professor.

Tarefa 1

André não querendo revelar a sua idade para os colegas, disse: "A minha idade é um número que estou pensando agora e, o triplo do quadrado desse número é 588. Logo, a minha idade é esse número!" Qual a idade de André?

Resolução

A idade de André é , pois

$$3x^2 = 588 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{588}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 196$$
$$x = \sqrt{196} \ \text{ ou } \ x = -196$$
$$x = 14 \ \text{ ou } \ x = -14$$

Tarefa 2

Pensei em um número que o dobro do seu quadrado é igual a 32. Qual pode ser esse número? Será que só tem esse? Pense em todas as possibilidades.

Resolução

Os possíveis valores para este número são 4 ou – 4 , pois:

$$2x^2 = 32 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{32}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 16$$
$$x = \sqrt{16} \ ou \ x = -\sqrt{16}$$
$$x = 4 \ ou \ x = -4$$

Tarefa 3

O quádruplo de um número ao quadrado é igual a 16. Quais são os possíveis valores para esse número?

Resolução

Os possíveis valores para esse número são 2 e -2 , pois:

$$4x^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{16}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4$$
$$x = \sqrt{4} \ \text{ ou } \ x = -\sqrt{4}$$
$$x = 2 \ \text{ ou } \ x = -2$$

Tarefa 4

O triplo de um número real elevado ao quadrado é igual a 432. Sabendo que a soma dele com 21 é igual a 9, qual é esse número?

Resolução

$$3x^2 = 432 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{432}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 144$$

$$x = \sqrt{144} \ \text{ ou } \ x = -\sqrt{144}$$

$$x = 12 \ \text{ ou } \ x = -12$$

Como a solução procurada adicionada com 21 resulta em 9, temos que o resultado só pode ser o número -12.

Tarefa 5

Escolhi um número, elevei ao quadrado e multipliquei o resultado por 4. O resultado que encontrei foi 9. Quais são os possíveis valores para esse número?

Resolução

$$4x^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{9}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{9}{4}} \ \text{ ou } \ x = -\sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$x = \frac{3}{2} \ \text{ ou } \ x = -\frac{3}{2}$$

Todas as cinco tarefas propostas nesta sequência de tarefas podem ser desenvolvidas com os alunos na janela CAS do GeoGebra. São problemas que exigem dos estudantes todas as etapas da ASPM, desenvolvendo assim, o pensamento algébrico.

5 Quarta Sequência de Tarefas

O objeto de conhecimento abordado será a equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$, do qual o estudante desenvolverá a habilidade (EF08MA09): Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$. O objetivo de aprendizagem será resolver equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ no GeoGebra, dados os conteúdos de conhecimento prévio: equações, pensamento algébrico, conjuntos numéricos, contagem e operações algébricas.

> Esta primeira Sequência de Tarefas está composta por 6 tarefas e suas respectivas resoluções. As resoluções realizadas no GeoGebra são sugestivas e podem sofrer mudanças conforme os objetivos estabelecidos pelo professor.

Tarefa 1

Considere os conjuntos $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{0,1,2\}$ e a equação $ax^2 = b$. Se o coeficiente for um número do conjunto A e o coeficiente b for um número do conjunto B, escreva todas as equações $ax^2 = b$ possíveis se $b < a$, obtendo suas respectivas respostas.

Resolução

Como $b < a$ temos os casos $b = 0$ e $a = 1,2$ ou 3, $b = 1$ e $a = 2$ ou 3 e $b = 2$ e $a = 3$. Logo, teremos as seguintes situações:

i. $1 \cdot x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

ii. $2 \cdot x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

iii. $3 \cdot x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

iv. $2 \cdot x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

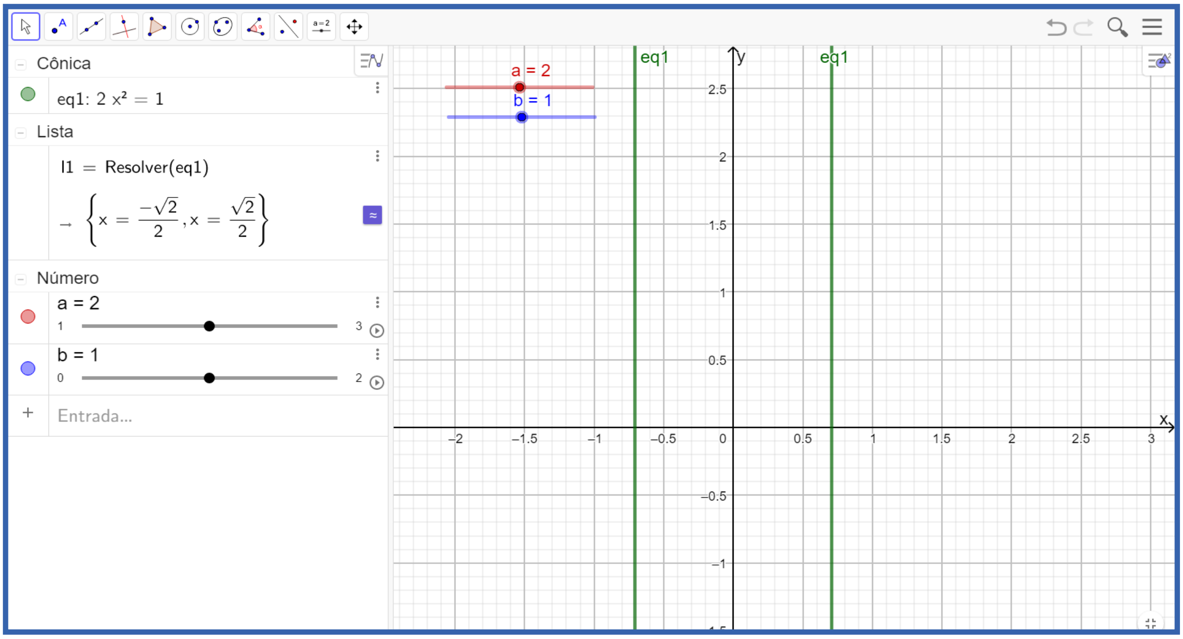
v. $3 \cdot x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$

vi. $3 \cdot x^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Uma forma interessante de resolver este problema utilizando o GeoGebra é criando dois controles deslizantes para e da equação. Para tanto, basta selecionar o ícone , em que, se abrirá uma janela para a escolha do valor mínimo, máximo e do incremento para o controle deslizante e, ao clicar na janela 2D, será apresentado o controle na janela de álgebra automaticamente. Repete-se o processo para .

Com os controles deslizantes criados, em seguida basta digitar a equação $ax^2 = b$ e apertar Enter. A equação apresentada tomará como valores de a e b os selecionados no controle deslizante. Por fim, basta inserir o comando Resolver(<Equação>) no campo de entrada da janela de álgebra.

Figura 60: Controle deslizante na equação.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Na figura 60, o controle em vermelho ($a = 2$) e o controle em azul ($b = 1$) resultam na equação (iv) e as retas da equação na cor verde cortam o eixo x justamente nas raízes da equação.

Tarefa 2

Discuta todas as possíveis soluções, de todos os casos de uma equação na forma $a \cdot x^2 = b$, caso os cartões sorteados para substituir os valores de e contenham os números 1 e 3.

Resolução

Caso 1:

$$1x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1$$
$$x = \sqrt{1} \text{ ou } x = -\sqrt{1}$$
$$x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Caso 2

$$3x^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{3}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x^2$$
$$x = \sqrt{1} \text{ ou } x = -\sqrt{1}$$
$$x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Caso 3:

$$1x^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 3$$
$$x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$$

Caso 4:

$$3x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{3}$$
$$x = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Racionalizando (opcional neste momento)

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Tarefa 3

Considere que você possui três cartões na mesa, um com o número zero, outro com o número –1 e outro com o número 1. Sorteamos um cartão para ser o valor de a, recolocamos o cartão na mesa, e sorteamos um cartão para ser o valor de b. Agora na equação $ax^2 = b$, escreva todas as possíveis equações com todos os possíveis desfechos.

Resolução

Podemos ter: $1 \cdot x^2 = 1$, $1 \cdot x^2 = 0$, $1 \cdot x^2 = -1$, $0 \cdot x^2 = 1$, $0 \cdot x^2 = 0$, $0 \cdot x^2 = -1$, $-1 \cdot x^2 = 1$, $-1 \cdot x^2 = 0$ e $-1 \cdot x^2 = -1$

Alguns casos são equivalentes, como o $1\cdot x^2=-1$ e $-1\cdot x^2=1$, e o $1\cdot x^2=$ 1 e $-1\cdot x^2=-1$. Os casos $-1\cdot x^2=0$ e $1\cdot x^2=0$ são equivalentes também assim como o $0\cdot x^2=1$ e $0\cdot x^2=-1$

$$1\cdot x^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad x=1 \text{ ou } x=-1$$

$$1\cdot x^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0$$

$0\cdot x^2=1$ não possui solução

$0\cdot x^2=1$ possui infinitas soluções. Pense em um número qualquer, coloque ele ao quadrado e multiplique por zero. A resposta é sempre zero!

Tarefa 4

Sorteie dois dos cartões contendo os números 0, -2 e 8. Determine qual será o número que elevado ao quadrado e multiplicado pelo número do primeiro cartão será igual ao segundo cartão.

Resolução

Caso 1:

$$8x^2=0 \qquad\qquad -2x^2=0$$

$$x^2=\frac{0}{8} \qquad\qquad x^2=\frac{0}{-2}$$

$$x^2=0 \qquad\qquad x^2=0$$

Caso 2:

$$-2x^2=8 \qquad\qquad 8x^2=-2$$

$$x^2=\frac{8}{-2} \qquad\qquad x^2=\frac{-2}{8}$$

$$x^2=-4 \qquad\qquad x^2=-\frac{1}{4}$$

Caso 3:

$$0x^2=8 \qquad\qquad 0x^2=-2$$

$$0=8 \qquad\qquad 0=-2$$

Tarefa 5

Considere um número que:

a) Ao somar uma unidade, elevar ao quadrado e multiplicar por 3 o resultado, obtemos 108;

b) Ao subtrair uma unidade, elevar ao quadrado e multiplicar por 2 o resultado, obtemos 128. Qual é esse número?

Resolução

Item (a): Seja x esse número, então temos:

$$3(x+1)^2 = 108 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = \frac{108}{3} \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = 36 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = 6^2$$

$$x+1 = 6 \quad \text{ou} \quad x+1 = -6$$

$$x = 5 \quad \text{ou} \quad x = -7$$

Item (b):

$$2(x-1)^2 = 128 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 64$$

$$x-1 = 8 \quad \text{ou} \quad x-1 = -8$$

$$x = 9 \quad \text{ou} \quad x = -7$$

O número é -7.

Tarefa 6

Em cada um dos cartões tem números naturais. Sorteie um dos cartões. Esse primeiro cartão que você sorteou será o número que será colocado no lugar do "a" na equação $ax^2 = b$. Coloque o cartão de volta e faça outro sorteio. O segundo número sorteado deverá ser colocado no lugar do "b". Quais são os possíveis valores de x, se nos cartões aparecerem os números 4 e 9? Discuta todas as possibilidades.

Resolução

Caso 1:

$$9x^2 = 9 \iff x^2 = \frac{9}{9} \iff x^2 = 1$$

$$X = \sqrt{1} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{1}$$

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

Caso 2:

$$4x^2 = 4 \iff x^2 = \frac{4}{4} \iff x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{1}$$

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

Caso 3:

$$9x^2 = 4 \iff x^2 = \frac{4}{9}$$

$$x = \sqrt{\frac{4}{9}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$x = \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{2}{3}$$

Caso 4:

$$4x^2 = 9 \iff x^2 = \frac{9}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{9}{4}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$x = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{3}{2}$$

As cinco tarefas propostas nesta sequência de tarefas podem ser desenvolvidas com os alunos na janela CAS e controles deslizantes do GeoGebra. São problemas que exigem alguns conhecimentos prévios dos estudantes para que possam fazer a leitura correta (ler e interpretar) das tarefas.

6 Quinta Sequência de Tarefas

O objeto de conhecimento abordado será a equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$, do qual o estudante desenvolverá a habilidade (EF08MA09): Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$. O objetivo de aprendizagem será resolver equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ no GeoGebra, dados os conteúdos de conhecimento prévio: equações, geometria plana, geometria espacial, pensamento algébrico e operações algébricas.

Esta primeira Sequência de Tarefas está composta por 6 tarefas e suas respectivas resoluções. As resoluções realizadas no GeoGebra são sugestivas e podem sofrer mudanças conforme os objetivos estabelecidos pelo professor.

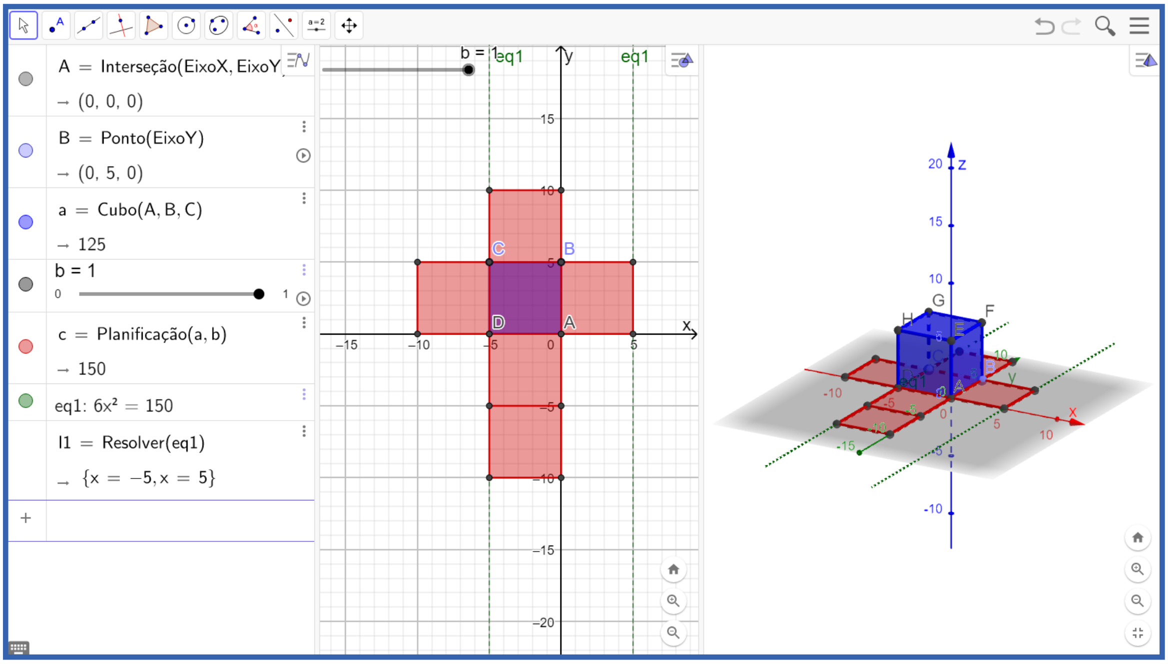
Tarefa 1

Determine, utilizando o GeoGebra, o lado de um quadrado que é face de um cubo que possui superfície total medindo 150 m^3.

Resolução

A partir da leitura do problema, o que se pede é apenas a medida do lado de uma das 6 faces do cubo. Utilizando a janela 3D do GeoGebra podemos desenhar o cubo utilizando poucos ícones. Basta abrir a janela de visualização 3D do GeoGebra, abrir as opções no ícone Pirâmide e, em seguida selecionar Cubo e selecione dois pontos no gráfico da “janela 3D” e logo seguida no ícone pirâmide selecione Pirâmide o que resultará na planificação do cubo que também pode ser visualizada na janela 2D.

Figura 61: Planificação do cubo.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Portanto, como o cubo possui 6 faces, em que, cada face possui área igual a x^2e a área total dessas faces é de $150\ \mathrm{cm}^2$, teremos:

$$6x^2 = 150 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{150}{6} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{25}$$

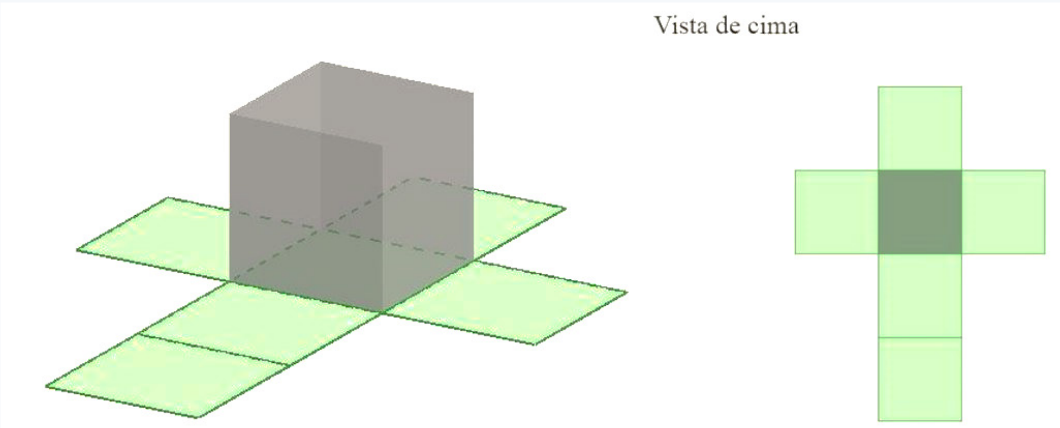
Neste caso, ao fazer a divisão de 150 por 6 facilitará os cálculos, caso contrário, teríamos seguindo a generalização, resultando em uma nova estratégia para encontrar as raízes quadradas de 150 e 6. As raízes serão $\mathrm{x} = 5$ ou $\mathrm{x} =$ -5, ou seja, o lado do quadrado é igual a $5\ \mathrm{cm}$.

Este cálculo é facilmente resolvido no GeoGebra ao inserir a equação $6\mathrm{x}^2 = 150$ no campo de entrada e utilizar o comando "Resolver(<Equação>)" sempre apertando na tecla "Enter" e teremos como resultado o que está ilustrado a figura 61.

Tarefa 2

Luiz comprou uma caixa com peças e acessórios de PC-game para dar de presente de aniversário a Jânio, seu amigo de infância. Luiz não querendo gastar em papel de presente, utilizou um papel de presente que tinha guardado para embrulhar a caixa que tinha o formato de cubo. Luiz, ao visualizar a caixa, percebeu que ela continha descrição apenas da área suficiente para cobrir a caixa sem desperdiçar papel, $3750\ \mathrm{cm}^2$. Mas, Luiz percebeu que para cortar o papel na medida correta precisaria saber as dimensões da caixa. Qual deve é a medida do lado dessa caixa?

Figura 62: Caixa planificada.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Resolução

A partir da leitura do problema, o que se pede é apenas a medida do lado da caixa (cubo). Utilizando a janela 3D do GeoGebra podemos desenhar o cubo e, em seguida, selecionar o ícone de planificação para verificar toda a superfície do cubo que será visualizado nas janelas 2D e 3D.

Como o cubo possui 6 faces e cada face possui área igual a e a área total dessas faces é de $3750\ \text{cm}^2$, teremos:

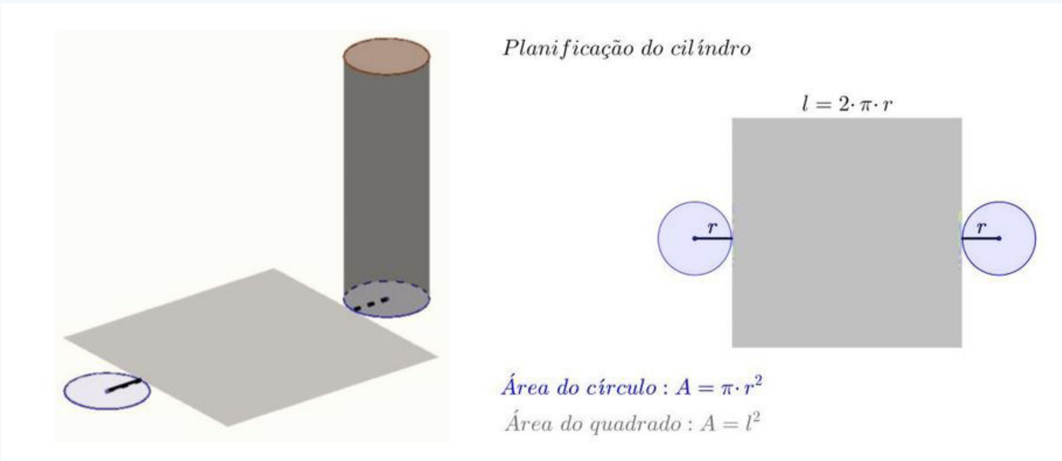
$$6x^2 = 3750 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{3750}{6} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 625 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{625}$$

Logo, as raízes serão $x = 25$ ou $x = -25$, assim, o lado do quadrado é igual a 25 cm. É importante chamar atenção para o fato de que as ações e operações para resolver esta tarefa são as mesmas da tarefa anterior, porém, se diferenciam na leitura e interpretação do problema, podendo ajudar os estudantes na assimilação dos conceitos de geometria espacial.

Tarefa 3

Deduzir fórmula geral da área total da superfície de um cilindro com as bases cobertas. Sabendo que a superfície que une as bases circulares, quando planificado, forma um quadrado. (Considere $\pi = 3{,}14$).

Figura 63: Planificação da superfície lateral do Cilindro.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Resolução

A partir da leitura do problema, o que se pede fórmula geral da soma da superfície lateral com as bases do cilindro. Utilizando a janela 3D do GeoGebra podemos desenhar o cilindro planificá-lo para verificar toda a superfície do cubo que será visualizado nas janelas 2D e 3D.

Contudo, para a dedução da fórmula os estudantes deverão considerar que o lado do quadrado será igual ao comprimento da circunferência $l = C = \pi r$, como a área do quadrado é dado por $A_Q = l^2$, a área da superfície lateral do cilindro resultará em $A_Q = (2\pi r)^2$. Já a área dos círculos formados pelas bases do cilindro será dada por $A_C = \pi r^2$, porém, como temos duas bases iguais, então $A_C = \pi r^2$. Portanto, basta fazer as somas e operações necessárias para deduzir a fórmula da área total A_T:

$$A_T = A_q + A_C = (2\pi r)^2 + 2\pi r^2 = 4\pi^2 r^2 + 2\pi r^2 =$$
$$A_T = 2\pi r^2 \cdot (2\pi + 1)$$

Ao utilizar o GeoGebra, os cálculos algébricos serão realizados na janela de cálculo algébrico simbólico (CAS). A partir daí podem ser feitas outras perguntas como: Qual será a medida do raio quando a área total for igual a $676\ \text{cm}^2$? Qual será a área total quando o raio for igual a 10cm?

Tarefa 4

Uma aplicação prática de equações do 2º grau ocorre na cinemática. Uma expressão que descreve o quanto o objeto se desloca em função do tempo é dada aproximadamente pela equação $S = 5 \cdot t^2$. Onde S é o espaço percorrido, em metros, e t o tempo, em segundos, que passou após o objeto permanecer livre, apenas sob ação da gravidade.

a) Gilson tem um poço seco de 20 metros, soltando uma pedra do topo, quanto tempo se passa para que essa pedra atinja o fundo do poço?

b) Gilson encontra outro poço seco, joga uma pedra e percebe que a pedra atinge o fundo do poço em 1,5 segundo. Qual a profundidade do poço?

Resolução

Para o item (a), o deslocamento será de 20 metros, pois substituindo na expressão e, realizando os cálculos, temos:

$$5t^2 = 20 \quad \Rightarrow \quad t^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad t = \pm\sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad t = 2s \quad \text{ou} \quad t = -2s$$

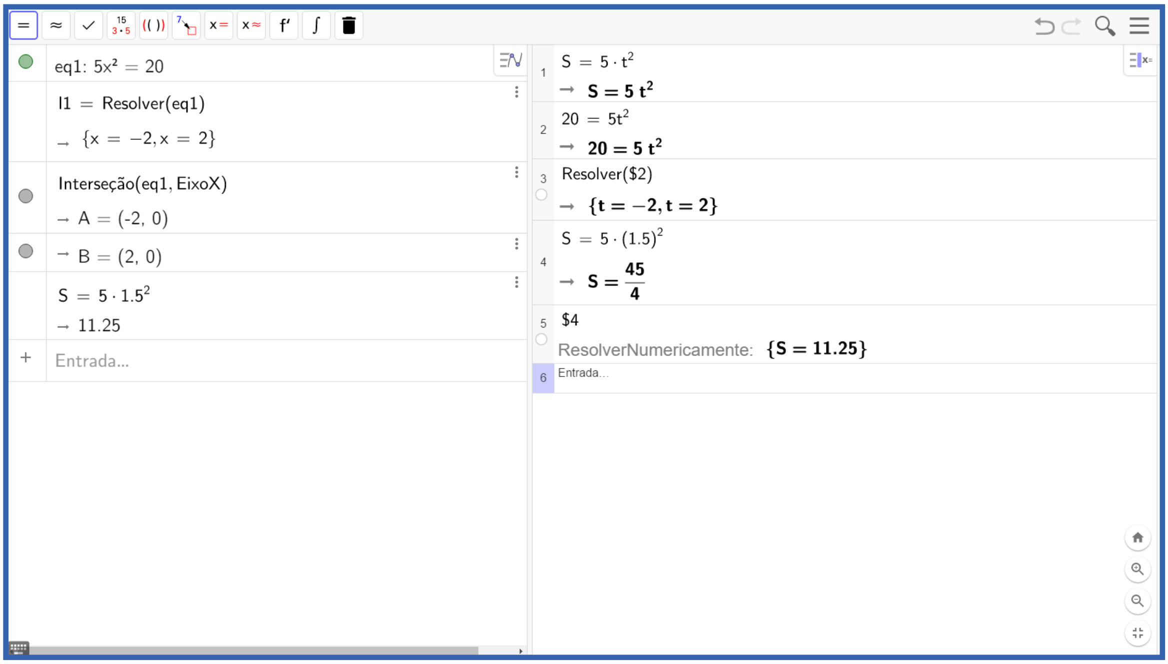
A interpretação do problema nos permite apenas a solução de t = 2s, logo Gilson percebeu que em 2 segundos a pedra atinge o fundo do poço. Para resolver o item (b), basta substituir t = 1,5 na expressão e, realizando os cálculos, temos:

$$S = 5 \cdot (1{,}5)^2 = 5 \cdot (2{,}25) = 11{,}25 \text{ m}$$

Portanto, Gilson verificou que o segundo poço possui 11,25 metros de profundidade. Agora, com o auxílio do GeoGebra, o estudante pode utilizar um processo semelhante à tarefa 1 da sequência 2, mas sem utilizar os controles deslizantes.

Ao abrir a janela CAS, basta substituir o valor de e usar o comando resolver, como consta nas linhas 2 e 3 da figura 64, o que responde ao item (a). Nas linhas 4 e 5 contêm a resolução do item (b), porém, na janela CAS, mesmo com entradas de números decimais a resposta será mostrada, automaticamente conforme configurações, no formato de fração. Para mostrar o resultado em forma decimal basta clicar no ícone resolver numericamente x≈ da janela CAS.

Figura 64: Cálculo algébrico da expressão na janela CAS.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Tarefa 5

Considere as seguintes afirmações. Justifique as afirmações verdadeiras, e encontre exemplos que falham nas afirmações falsas. Sobre uma equação do tipo $ax^2 = b$ podemos afirmar que:

a) Se a ou b forem positivos, essa equação tem duas soluções.

b) Se a for igual a zero então essa equação nunca tem solução.

c) Se b for igual a zero, então $x = 0$ é sempre solução.

d) Essa equação pode ter uma única solução, duas soluções, nenhuma solução ou infinitas.

Resolução

Item (a): Falso, se $b = 0$, temos a equação $ax^2 = 0$. Se a for 1, por exemplo, a equação fica x^2 que só tem a solução $x = 0$.

Item (b): Falso, se $b = 0$ a equação fica $0x^2$. Perceba que qualquer número que você pensar e colocar no lugar do x funciona como solução.

Item (c): Verdadeiro. Veja que a equação fica $ax^2 = 0$, pelas afirmações anteriores concluímos que de fato $x = 0$ é solução.

Item (d): Verdadeiro, essa é a conclusão sobre essa aula, uma vez que nas aulas anteriores conseguimos identificar os casos de ter uma solução ou duas soluções, e nessa aula vimos os casos de não ter solução ou ter infinitas soluções.

Tarefa 6

Elabore um problema que possa ser resolvido a partir da resolução de uma equação na forma $ax^2 = b$, e depois discuta quantas são as soluções possíveis e por quê.

Resolução

Como se trata de uma questão pessoal, traremos aqui um exemplo para compreender o que pode ser feito:

"Três quadrados idênticos possuem juntos uma área total de $876\ \mathrm{m}^2$. Qual é o lado de cada um deles?"

Resolução possível:

$$3x^2 = 867 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{867}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 289$$

$$x = \sqrt{289} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{289}$$

$$x = 17 \quad \text{ou} \quad x = -17$$

Nesse caso é preciso lembrar que a solução só pode ser um número positivo para o caso de medidas, porém, pode ser proposto um problema que requer um valor negativo como solução, ou até mesmo um item que peça a realização de uma operação com as soluções encontradas.

A tarefas que compõem esta sequência de tarefas exigem dos estudantes conhecimentos novos sobre conceitos de geometria espacial e de função e, que podem ser desenvolvidas com os alunos na janela 3D do GeoGebra. São problemas que exigem dos estudantes todas as etapas da ASPM, desenvolvendo assim, o pensamento algébrico.

Vale ressaltar que todas as sequências de tarefas e a SD realizada na pesquisa farão parte do Produto Educacional que foi elaborado com o intuito de aproximar tanto os estudantes quanto os professores do ensino e aprendizagem da matemática por meio das tecnologias. Por consequência, os estudantes desenvolvem as competências e habilidades em álgebra com TDIC e os professores desenvolve competências quanto ao GeoGebra.

Considera-se que é de suma importância que os professores de matemática, em plena era digital, conheçam e utilizem as tecnologias voltadas ao ensino e desenvolvimento de habilidades. Não somente para ensinar álgebra, mas todos os objetos de conhecimento possíveis.

Portanto, o professor que estiver disposto a fazer a mudança nas suas aulas, tem o dever de utilizar tais ferramentas para melhorar o aprendizado de seus alunos. Podendo, então, fazer uso destas tarefas em suas aulas de álgebra ou, a partir delas, elaborar um material que possa auxiliá-lo em outros objetos de conhecimento. Na seção a seguir é apresentada a SD realizada com os participantes da pesquisa.

Unidade 6

Tarefas no GeoGebra

1 Tarefas no GeoGebra

As tarefas descritas na subseção a seguir foram elaboradas para que o professor se familiarize com o GeoGebra e que poderão lhe servir de modelo para a criação de suas próprias SD a serem aplicadas com seus estudantes nos conteúdos descritos pela BNCC (BRASIL, 2018). Porquanto, a Sequência Didática, o Material didático (Tutorial de noções básicas do GeoGebra) e a Sequência de Tarefas compõem o Produto Educacional.

Na SD, define-se o objeto de conhecimento, o objetivo geral, a habilidade e o problema inicial a ser resolvido por meio da ASPM e envolve a sequência de tarefas que é apresentada em dois momentos, ao início e ao final da investigação. Nesta SD, serão abordados recursos para a modelagem e a resolução de problemas no GeoGebra que possam ser representados por meio de equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

2 Sequência Didática

Objeto de conhecimento	Equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
Competências específicas	Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados (BRASIL, 2018).
Habilidade	(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

Objetivo de aprendizagem	Resolver equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
Objetivo geral	Investigar as contribuições do software GeoGebra no desenvolvimento da habilidade de resolver e elaborar, com uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ por meio da Atividade de Situações Problema.
Conhecimento prévio	Equações; Área do retângulo; Área do quadrado.
Materiais e recursos	Computador e Conceitos básicos sobre software GeoGebra para tratar de situações problema (Material didático).

Desenvolvimento

Quantidade de aulas: 3

Aula 1

Tarefa 1

Ana Viajou para Índia mês passado e comprou um dos famosos tapetes indianos que possui uma área quadrada de $5\ \mathrm{m}^2$. Porém, Ana preocupou-se com que o tapete ficasse maior que o chão de seu pequeno quarto para meditação medindo $2{,}5\ \mathrm{m}^2$, então resolveu medir o lado do tapete para tirar sua dúvida. Qual é a medida aproximada do lado do tapete de Ana? E como resolver o problema utilizando o GeoGebra?

Passos a serem desenvolvidos no GeoGebra:

Montar o modelo matemático e realizar os cálculos na "janela de álgebra". Desenhar um quadrado na "janela de visualização 2D" com a medida do lado correspondente ao ponto de interseção da reta perpendicular com o "Eixo X".

Tarefa 2

Na fazenda de seu Zé existem três celeiros quadrados de mesma área um ao lado do outro. Sendo o primeiro celeiro para a colheita de arroz, o segundo para a colheita de feijão e o terceiro para a colheita de trigo. Os três celeiros ocupam uma área total de $300\ \mathrm{m}^2$. Utilizando o GeoGebra, qual é a medida do lado do celeiro destinada para o armazenamento do arroz?

Passos a serem desenvolvidos no GeoGebra:

Montar o modelo matemático e realizar os cálculos na “janela de álgebra” ou “janela CAS”. Desenhar os quadrados na “janela de visualização 2D” com a medida do lado correspondente ao ponto de interseção da reta perpendicular com o “Eixo X”.

Aula 2

Tarefa 3

Dona Lurdes é costureira, e essa semana resolveu fazer uma colcha com 10 retalhos quadrangulares de dimensões idênticas que sobraram de outros tecidos. Dona Lurdes pretende costurar os retalhos de forma que sua superfície seja de $2\ \mathrm{m}^2$. Como podemos utilizar o GeoGebra para encontrar a medida do lado de cada retalho?

Figura 65: Colcha de retalhos quadrangulares da tarefa 2.

Fonte: adaptado do google imagens

Passos a serem desenvolvidos:

Desenhar um quadrado na “janela de visualização 2D” (podendo fixar a imagem dos retalhos na janela de visualização) para posteriormente redimensioná-lo ou inserir o texto da questão. Montar o modelo matemático e realizar os cálculos na “janela de álgebra” e na “janela CAS”.

Tarefa 4

Como podemos utilizar o GeoGebra para determinar a medida do lado de um dos quadrados que compõem as faces de um cubo. Sabendo que esse cubo possui 150 cm^2 de área total em sua superfície?

Passos a serem desenvolvidos:

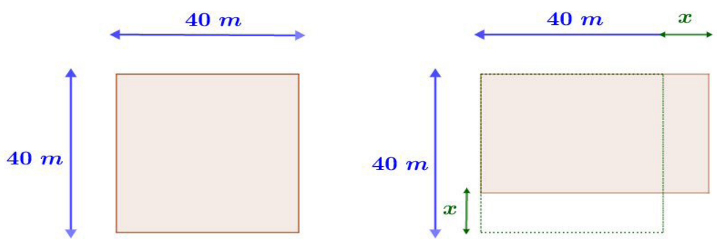
Desenhar um cubo na “janela de visualização 3D” e posteriormente planificá-lo e redimensioná-lo. Na “janela de visualização 2D” apresentará a planificação. Montar o modelo matemático e realizar os cálculos na “janela de álgebra”.

Aula 3

Tarefa 0 (Problema inicial)

Como podemos utilizar o GeoGebra para determinar a medida do lado de um dos quadrados que compõem as faces de um cubo. Sabendo que esse cubo possui 150 cm^2 de área total em sua superfície?

Figura 66: Terreno em formato quadrangular do problema inicial.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

a) É possível escrever um modelo de equação que represente a situação problema?

b) Qual(is) propriedade(s) pode(m) ser utilizada(s) para resolver o modelo da equação?

c) A equação encontrada equivale ao formato da equação $ax^2 = b$?

d) Quais são os valores de a e b na equação encontrada?

e) Quais são os possíveis valores para x?

Avaliação:

Agora os alunos devem ser capazes de resolver e elaborar problemas por equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$. A proposição de tarefas apresentadas na Unidade 5 devem ser sugeridas para o desenvolvimento da habilidade.

A avaliação tem como objetivo verificar o desenvolvimento de habilidades nos estudantes na aplicação da sequência didática estruturada pelo professor conforme as sequências de tarefas sugeridas devendo verificar a contribuição da ASPM. Os resultados da aplicação da SD devem ser analisados e comparados para contribuir para a prática do professor e desenvolvimento dos estudantes.

Portanto, fica a critério dos objetivos do professor, podendo realizar avaliações formativas.

Considerações

Com os objetivos traçados pelo professor é possível uma Sequência Didática utilizando as tarefas disponíveis neste Produto Educacional. Para tanto, é de suma importância a mediação do professor durante todo o processo.

Este Produto Educacional é resultado da dissertação de mestrado e foi elaborado seguindo as diretrizes preconizadas pela BNCC para a unidade temática de álgebra para o 8º ano do Ensino Fundamental. O objeto de conhecimento centrou-se na "Equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$", cuja habilidade a ser desenvolvidas pelos alunos está em "Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo " (BRASIL, 2018, p. 312-313).

As tarefas da Sequência Didática contribuíram para a construção e assimilação de modelos e conceitos matemáticos da álgebra com apoio de conceitos de geometria na pesquisa. Nesse sentido, o cálculo de áreas de figuras planas e planificação de figuras espaciais foram os objetos da geometria utilizados para introdução dos conceitos. Contudo, é de responsabilidade do professor modificar, explorar e acrescentar a sua sequência didática conforme seus objetivos de aprendizagem.

O GeoGebra está posto como um dos fatores motivacionais e é fundamental para o desenvolvimento destas habilidades pelos estudantes. Como se trata de um *software* educacional é necessário que a escola possua um laboratório de informática com um bom quantitativo de computadores e com sistemas operacionais atualizados e que suportem a instalação de *softwares* como o GeoGebra para a aplicação das tarefas.

Vale ressaltar que a utilização do computador ou do GeoGebra, com todas as potencialidades que geram, não garantem o desenvolvimento de habilidades sem a intervenção do professor por meio do seu planejamento de atividades e tarefas bem elaboradas e direcionadas.

Portanto, ao utilizar o GeoGebra, em conjunto com uma Sequência de Tarefas quando bem planejada, pode proporcionar aos estudantes o desenvolvimento de habilidades tanto com a tecnologia através dos seus comandos, quanto com a matemática sobre o objeto de conhecimento álgebra.

Acreditamos que o Produto Educacional servirá de apoio aos professores de matemática do Ensino Fundamental e, até mesmo de outras etapas.

Rereferências

ARAÚJO, J. J. **Atividades exploratórias de Álgebra e Geometria com a utilização do software GeoGebra para a formação continuada de Professores de Matemática do Ensino Fundamental. 2017. 47 f.** Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2017.

ARAÚJO, L. C. L.; COSTA, J. C. **Aprendendo Matemática com o GeoGebra.** Nóbrega, São Paulo: Exato, 2010.

BARROS, A. P. R. M.; STIVAM, E. P. O Software GeoGebra na Concepção de Micromundo. **1ª. Conferência Latino-Americana de GeoGebra**. p.184-194, 2012.

BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G. **O GeoGebra e a matemática da educação básica: frações, estatística, círculo e circunferência**. Curitiba: Ithala, 2014.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: Sala de aula e internet em movimento**. 2. ed. 1ª reimp., Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2018.

BRASIL, **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em: 12 jan. 2019.

COELHO, A. S. **Tarefas para o ensino de equações polinomiais de segundo grau com o software GeoGebra: Uma alternativa para o desenvolvimento de habilidades em estudantes do 8º ano.** 2021. 204 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências) – Universidade Estadual de Roraima. Boa Vista-RR, 2021.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Ática, 2003.

FREIRE, A. A. C. O **Uso do GeoGebra na Resolução de Problemas Matemáticos a partir da Teoria de Galperin**. 2016. 117 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências) – Universidade Estadual de Roraima. Boa Vista, 2015.

GEOGEBRA, **Materiais didáticos**. Disponível em: https://www.geogebra.org/materials. Acesso em: 18 ago. 2018.

HOHENWARTER, M. **Multiple representations and GeoGebra-based learning environments. Revista Iberoamericana de Educación Matemática (Unión)**. n 39. p. 11-18. Sep. 2014.

MENDOZA, H. J. G.; DELGADO, O. **A Atividade de Situações Problema em Matemática. In: LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, Roberto Valdés. (Org.) Ensino, aprendizagem e desenvolvimento: fundamentos psicológicos e didáticos para o ensino desenvolvimental**. 1 ed. Uberlândia: EDUFU, v. 1, p. 373-403, 2017.

NOVA ESCOLA, **Plano de Aula**. Disponível em: https://novaescola.org.br/. Acesso em: 18 abr. 2019.

OLIVEIRA, S. C.; LAUDARES, J. B. Pensamento Algébrico: Uma relação entre Álgebra, Aritmética e Geometria. In: **VII Encontro Mineiro de Educação Matemática**, 2015, São João Del Rei. Práticas Educativas e Pesquisas em Educação Matemática. Juiz de Fora: UFSJ, v. 1, p. 1-12, 2015.

O Produto Educacional aqui apresentado está composto por uma Sequência Didática, Tarefas sugeridas envolvendo álgebra, aritmética e geometria e um Tutorial resumido do software GeoGebra desenvolvido no percurso de uma pesquisa no âmbito do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências da Universidade Estadual de Roraima (UERR), intitulada "Tarefas para o Ensino de Equações Polinomiais de Segundo Grau com o Software GeoGebra: Uma Alternativa para o Desenvolvimento de Habilidades em Estudantes do 8º ano". Essa pesquisa foi desenvolvida objetivando possibilitar um processo de ensino Da álgebra por meio da resolução de problemas com auxílio do software GeoGebra. Assim investigamos o desenvolvimento da habilidade "Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ - EF08MA09" preconizada na BNCC (BRASIL, 2018, p. 312-313).

UERR
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE RORAIMA

PPGEC
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO
EM ENSINO DE CIÊNCIAS
MESTRADO PROFISSIONAL