



ESTADO DE RORAIMA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE RORAIMA – UERR
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO – PROPEI



PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO
EM ENSINO DE CIÊNCIAS
MESTRADO PROFISSIONAL

ADJAIRON DA SILVA COELHO

TAREFAS PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE
SEGUNDO GRAU COM O SOFTWARE GEOGEBRA: UMA
ALTERNATIVA PARA O DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES EM
ESTUDANTES DO 8º ANO

Boa Vista – RR
2021

ADJAIRON DA SILVA COELHO

**TAREFAS PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE
SEGUNDO GRAU COM O SOFTWARE GEOGEBRA: UMA
ALTERNATIVA PARA O DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES EM
ESTUDANTES DO 8º ANO**

Boa Vista – RR

2021

TERMO DE CIÊNCIA E AUTORIZAÇÃO PARA PUBLICAÇÃO DE TCC, TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NO SITE DA UERR

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Estadual de Roraima – UERR a disponibilizar gratuitamente através do site institucional <https://www.uerr.edu.br/multiteca/>, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico:

() Trabalho de Conclusão de Curso (x) Dissertação () Tese

2. Identificação do TCC, Dissertação ou Tese

Autor: Adjairon da Silva Coelho

E-mail: adjaironrr@hotmail.com

Agência de Fomento: Não houve

Título: Tarefas para o Ensino de Equações Polinomiais de Segundo Grau com o Software GeoGebra: Uma Alternativa para o Desenvolvimento de Habilidades em Estudantes do 8º Ano.

Palavras-Chave: GeoGebra. Tecnologias Digitais. Resolução de Problemas. Equação polinomial. Álgebra.

Palavras-Chave em outra língua: GeoGebra. Digital Technologies. Problem solving. Polynomial equation. Algebra.

Área de Concentração: Ensino de Ciências: Métodos Pedagógicos e Tecnologias Digitais no Ensino de Ciências

Grau: Mestrado

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Ensino de Ciências - PPGE

Orientador(a): Profa. Dra. Solange Mussato

E-mail do orientador(a): solangemussato1@yahoo.com.br

Coorientador(a): Não houve

E-mail do coorientador(a):

Membro da Banca: Profa. Dra. Solange Mussato

Membro da Banca: Prof. Dr. Héctor José García Mendoza

Membro da Banca: Prof. Dr. Vinícius Pazuch

Data de Defesa: 02/08/2021 **Instituição de Defesa:** Universidade Estadual de Roraima.

DECLARAÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO NÃO-EXCLUSIVA

O referido autor: 1. Declara que o documento entregue é seu trabalho original, e que detém o direito de conceder os direitos contidos nesta licença. Declara também que a entrega do documento não infringe, tanto quanto lhe é possível saber, os direitos de qualquer outra pessoa ou entidade; 2. Se o documento entregue contém material do qual não detém os direitos de autor, declara que obteve autorização do detentor dos direitos de autor para conceder à Universidade Estadual de Roraima os direitos requeridos por esta licença, e que esse material cujos direitos são de terceiros está claramente identificado e reconhecido no texto ou conteúdo do documento entregue.

Informações de acesso ao documento:

Liberação para disponibilização: (x) Total () Parcial

Em caso de disponibilização parcial, assinale as permissões:

() Capítulos. Especifique: _____

() Outras restrições. Especifique: _____

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF e DOC ou DOCX da dissertação, TCC ou tese.

Assinatura do(a) autor(a): Adjairon da Silva Coelho Data: 15/07/2021.

ADJAIRON DA SILVA COELHO

**TAREFAS PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE
SEGUNDO GRAU COM O SOFTWARE GEOGEBRA: UMA
ALTERNATIVA PARA O DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES EM
ESTUDANTES DO 8º ANO**

Dissertação e o Produto Educacional apresentados ao Mestrado Profissional em Ensino de Ciências da Universidade Estadual de Roraima, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências.

Linha de Pesquisa: Métodos Pedagógicos e Tecnologias Digitais no Ensino de Ciências.

Orientadora: Profa. Dra. Solange Mussato

Copyright © 2021 by Adjairon da Silva Coelho

Todos os direitos reservados. Está autorizada a reprodução total ou parcial deste trabalho, desde que seja informada a **fonte**.

Universidade Estadual de Roraima – UERR
Coordenação do Sistema de Bibliotecas
Multiteca Central
Rua Sete de Setembro, 231 Bloco – F Bairro Canarinho
CEP: 69.306-530 Boa Vista - RR
Telefone: (95) 2121.0946
E-mail: biblioteca@uerr.edu.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C672t Coelho, Adjairon da Silva.
Tarefas para o ensino de equações polinomiais de segundo grau com o software geogebra: uma alternativa para o desenvolvimento de habilidades em estudantes do 8º ano. / Adjairon da Silva Coelho. – Boa Vista (RR) : UERR, 2021.
208 f. : il. Color 30 cm.

Orientadora: Profa. Dra. Solange Mussato.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Roraima (UERR), Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências (PPGE).

1. Álgebra 2. Ensino Problemático 3. Equação Polinomial 4. GeoGebra
I. Mussato, Solange (orient.) II. Universidade Estadual de Roraima – UERR III.
Título

UERR. Dis.Mes.Ens.Cie.2021 CDD – 512

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária
Letícia Pacheco Silva – CRB 11/1135 – RR

FOLHA DE APROVAÇÃO



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE RORAIMA

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA, PÓS-GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS

Ata de defesa da Dissertação do Mestrado em Ensino de Ciências do(a) mestrando(a) Adjairon da Silva Coelho com o Título **"SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE SEGUNDO GRAU: UMA ALTERNATIVA PARA O DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES POR ATIVIDADE DE SITUAÇÕES PROBLEMA COM ESTUDANTES DO 8º ANO"** e do produto educacional **"UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O DESENVOLVIMENTO DA HABILIDADE DE RESOLVER E ELABORAR, COM USO DO GEOGEBRA CLASSIC 6, PROBLEMAS QUE POSSAM SER REPRESENTADOS POR EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE 2º GRAU DO TIPO $ax^2 = b$ "**.

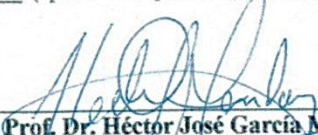
Aos dois dias do mês de agosto do ano de dois mil e vinte e um, às 14h, e considerando o Art. 14 da Resolução nº 1 de 26 de junho de 2020 da UERR, que orienta que as qualificações e defesas dos cursos de PG devem ser realizadas através de webconferência ou videoconferência, assim a Banca Examinadora de forma online pelo link: <https://www.meet.google.com/gpu-cgfs-uex>, realizou-se a Defesa Pública da Dissertação e do Produto Educacional do(a) mestrando(a) Adjairon da Silva Coelho, do Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências. A Comissão Avaliadora foi composta pelos seguintes professores: **Dra. Solange Mussato** – orientadora do trabalho, **Dr. Héctor José García Mendoza** e **Dr. Vinícius Pazuch**. A Presidente da Comissão Avaliadora, **Profa. Dra. Solange Mussato** deu início à sessão, convidando os membros da Comissão e o(a) mestrando(a) requerente ao título de **Mestre em Ensino de Ciências** a tomarem seus lugares e em seguida, assumiu a direção dos trabalhos convidando Adjairon da Silva Coelho para apresentar o seu trabalho. Após a apresentação, a Presidente passou a palavra aos membros da Comissão Avaliadora para seus questionamentos e arguição. Em seguida, o(a) mestrando(a) respondeu às perguntas, feitas pelos membros da Comissão. Após, a Comissão Avaliadora se reuniu para deliberação, divulgando a seguir o resultado de sua avaliação:

Aprovado, devendo considerar as sugestões da banca conforme pareceres em anexo, a fim de que haja uma melhor estruturação da versão final da dissertação.

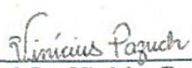
A sessão foi encerrada às 16 horas. Eu: **Profa. Dra. Solange Mussato** presidente da Comissão Avaliadora, lavrei a presente ata, que depois de lida e aprovada, foi assinada por mim, pela Comissão Avaliadora e pelo(a) mestrando(a) Adjairon da Silva Coelho, sendo **APROVADO** (aprovado/reprovado) o reconhecimento do título de **Mestre em Ensino de Ciências**.



Profa. Dra. Solange Mussato
Presidente da Banca



Prof. Dr. Héctor José García Mendoza
Membro Titular Interno



Prof. Dr. Vinícius Pazuch
Membro Titular Externo



Adjairon da Silva Coelho

Prof. Dr. Rossiter Ambrósio dos Santos
Membro Suplente



PPGEC
Rua 7 de Setembro, 231 - Caruarinho
CEP 69306-530 / Boa Vista - RR - Brasil
Fone: (95) 2121-0944
E-mail: ppgec@uerr.edu.br
Site: www.uerr.edu.br/ppgec

DEDICATÓRIA

Dedico esta pesquisa à minha esposa, amiga, companheira e, que tem um coração enorme e uma paciência inexplicável para comigo. Se estou triste, ela me alegra, se estou angustiado, ela me acalma, se estou cansado, ela me dá força, então, como não amar uma pessoa assim, que suporta tudo e que atura todas as críticas e adversidades para me ver feliz, ou melhor, para nos ver felizes. Por esses e vários outros motivos te dedico não somente esta pesquisa, mas todo o meu amor por você Ana Raquel Serra Alves.

AGRADECIMENTOS

Ao todo poderoso Deus que me dá forças e sabedoria para continuar a minha caminhada nesta terra e me deu a oportunidade de, até aqui, chegar. E, tenho fé que o Senhor ainda me levará a voos mais altos.

A todos os meus familiares e amigos que em mim confiam e estão do meu lado tanto nos momentos bons como nos momentos ruins. Muito obrigado pelas festas e confraternizações que me trouxeram tanta felicidade.

Aos professores, em especial, à minha orientadora Solange Mussato e, também, aos colegas do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências, turma 2018.1, pelo aprendizado, contribuições e amizades que vou levar por toda vida toda.

À minha mãe Maria Núbia Costa da Silva, essa mulher maravilhosa e guerreira, que por meio de muita luta e riscos, muito tem me ajudado nessa minha caminhada, seja na parte financeira ou no seu imenso amor por mim está sempre ao meu lado. Obrigado mamãe, eu te amo!

*A Matemática apresenta invenções tão sutis que
poderão servir não só para satisfazer os curiosos como
também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens.*
(Descartes)

RESUMO

Com o advento de novas Tecnologias Digitais voltadas para a educação matemática, busca-se introduzi-las nas aulas visando principalmente o ensino e aprendizagem, da álgebra e da geometria. Com a recente aprovação da Base Nacional Comum Curricular, que preconiza objetos de conhecimento segundo sua unidade temática e incentiva o uso de TD para o desenvolvimento de competências e habilidades. Nesse contexto, a presente pesquisa apresenta um estudo sobre esta temática, tendo a álgebra como unidade temática e o software *GeoGebra* como recurso tecnológico que é uma tendência em Tecnologias Digitais na Educação Matemática. Para tanto, a Teoria de Formação por Etapas das Ações Mentais que está definida por ações e operações que auxiliam no processo de assimilação de um dado objeto de ensino fundamenta a metodologia por Atividade de Situações Problemas em Matemática como abordagem em resolução de problemas e, que foram utilizadas na realização das tarefas elaboradas para a pesquisa. Deste modo, com o intuito de constituir um Produto Educacional a partir desse estudo, composto de uma metodologia bem definida, almeja-se responder a seguinte questão: De que forma a utilização do software *GeoGebra* por meio da Atividade de Situações Problema como metodologia de ensino possibilita o desenvolvimento da habilidade de resolver e elaborar problemas por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ com estudantes do 8º ano? Tendo como objetivo geral: Analisar as contribuições do software *GeoGebra* no desenvolvimento da habilidade de resolver e elaborar problemas sobre equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ por meio da Atividade de Situações Problema com os estudantes do 8º ano da Escola Estadual Monteiro Lobato. Por conseguinte, foi empregada uma investigação de cunho qualitativo, em que, se considerou todas as ações e operações das atividades realizadas no *GeoGebra* por meio da Atividade de Situações Problemas em Matemática. Entendemos que professor e o aluno ao utilizarem do software *GeoGebra*, por meio da Atividade de Situações Problema como metodologia de ensino, permite o desenvolvimento de habilidades na resolução de problemas por comandos do *GeoGebra* e que podem ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ com estudantes do 8º ano. Sendo assim, acreditamos que o Produto Educacional, que é um dos principais resultados desta pesquisa, consolida ainda mais o *GeoGebra* como uma tecnologia educacional importante para todos os professores de matemática e estudantes em todos os níveis de ensino.

Palavras-Chave: *GeoGebra*. Tecnologias Digitais. Resolução de Problemas. Equação polinomial. Álgebra.

ABSTRACT

With the advent of new Digital Technologies aimed at mathematics education, it is sought to introduce them in the classroom aiming mainly the teaching and learning of algebra and geometry. With the recent approval of the Common National Curricular Base, which advocates objects of knowledge according to their thematic unity and encourages the use of TD for the development of competencies and skills. In this context, the present research presents a study about this theme, having algebra as thematic unit and the GeoGebra software as a technological resource that is a trend in Digital Technologies in Mathematics Education. To this end, the Stages of Mental Actions Theory of Formation, which is defined by actions and operations that help in the process of assimilation of a given teaching object, is the basis of the Activity-Based Methodology of Problem-Situations in Mathematics as an approach to problem solving. Thus, to create an Educational Product from this study, composed of a well-defined methodology, we aim to answer the following question: How does the use of GeoGebra software through the Problem-Situation Activity as a teaching methodology allow the development of the ability to solve and elaborate problems by 2nd degree polynomial equations of the type of $ax^2 = b$ with 8th grade students? The general goal was to analyze the contributions of GeoGebra software in developing the ability to solve and elaborate problems about 2nd degree polynomial equations of the $ax^2 = b$ type through the Problem-Situation Activity with 8th grade students at Monteiro Lobato State School. Therefore, we used qualitative research, in which we considered all the actions and operations of the activities performed in GeoGebra through the Problem-Situation Activity in Mathematics. We understand that the teacher and the student using the GeoGebra software, through the Problem-Situation Activity as a teaching methodology, allows the development of skills in solving problems using GeoGebra commands that can be represented by 2nd degree polynomial equations of the $ax^2 = b$ type with 8th grade students. Thus, we believe that the Educational Product, which is one of the main results of this research, further consolidates GeoGebra as an important educational technology for all mathematics teachers and students at all grade levels.

Keywords: *GeoGebra*. Digital Technologies. Problem solving. Polynomial equation. Algebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1: Terreno em forma retangular.....	39
FIGURA 2: Habilidade EF08MA09 no Manual Matemática Essencial.....	47
FIGURA 3: Habilidade EF08MA09 no Manual Teláris Matemática.....	48
FIGURA 4: Habilidade EF08MA09 no Manual Trilhas da Matemática.	49
FIGURA 5: Habilidade EF08MA09 no Manual Matemática Realidade & Tecnologia.	50
FIGURA 6: Habilidade EF08MA09 no Manual A Conquista da Matemática.	51
FIGURA 7: LD Geração Alpha Matemática e Convergências Matemática.	52
FIGURA 8: Janela de Visualização inicial do GeoGebra Classic 6.....	72
FIGURA 9: Janela de álgebra.	74
FIGURA 10: Barra de ferramentas Janela de álgebra.....	74
FIGURA 11: Ícone Mover da barra de ferramentas.	75
FIGURA 12: Ícone Ponto da barra de ferramentas.....	75
FIGURA 13: Ícone Reta da barra de ferramentas.....	76
FIGURA 14: Ícone Reta Perpendicular da barra de ferramentas.....	77
FIGURA 15: Ícone Polígono da Barra de ferramentas.	78
FIGURA 16: Ícone Círculo da barra de ferramentas.....	79
FIGURA 17: Ícone Elipse da barra de ferramentas.	80
FIGURA 18: Ícone Ângulo da barra de ferramentas.....	81
FIGURA 19: Ícone Reflexão da barra de ferramentas.....	82
FIGURA 20: Ícone Controle deslizante da barra de ferramentas.....	83
FIGURA 21: Ícone Mover janela de visualização da barra de ferramentas.	84
FIGURA 22: Janela de visualização.....	85
FIGURA 23: Janela CAS.	86
FIGURA 24: Janela de Visualização 3D.	87
FIGURA 25: Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.	87
FIGURA 26: Ícone Mover da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.....	88
FIGURA 27: Ícone Ponto da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.....	88
FIGURA 28: Ícone Reta da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.	89
FIGURA 29: Ícone Reta Perpendicular da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.....	89
FIGURA 30: Ícone Polígono da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.	90
FIGURA 31: Ícone Círculo da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.	90
FIGURA 32: Ícone Intersecção de Duas Superfícies da Janela de Visualização 3D.....	91
FIGURA 33: Ícone Plano da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.....	91
FIGURA 34: Ícone Pirâmide da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.	92
FIGURA 35: Ícone Esfera da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.	93
FIGURA 36: Ícone Ângulo da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.....	93

FIGURA 37: Ícone Reflexão da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.	94
FIGURA 38: Ícone Texto da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.	94
FIGURA 39: Ícone Girar da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.	95
FIGURA 40: Teclado numérico básico.	95
FIGURA 41: Teclado de funções.	96
FIGURA 42: Teclado alfabético.	96
FIGURA 43: Teclado de Símbolos e operadores.	96
FIGURA 44: Menu de Ajuda de Comandos.	97
FIGURA 45: Seleção direta de janelas.	98
FIGURA 46: Janela de Geometria.	98
FIGURA 47: Planilha de Cálculos.	99
FIGURA 48: Ícones de Ferramentas da Planilha de cálculos.	99
FIGURA 49: Ícone Análise da Planilha de cálculos.	100
FIGURA 50: Ícone Lista da Planilha de cálculos.	100
FIGURA 51: Ícone Soma da Planilha de cálculos.	101
FIGURA 52: Janela da Calculadora de Probabilidades.	101
FIGURA 53: Campo de Entrada com Menu de Ajuda sobre Funções Matemáticas.	102
FIGURA 54: Colcha de retalhos em forma retangular no GeoGebra.	104
FIGURA 55: Colcha de retalhos em três janelas do GeoGebra.	105
FIGURA 56: Resolução com o comando “ResolverNumericamente” a equação.	106
FIGURA 57: Resolução com o comando “Raíz” na janela CAS do GeoGebra.	107
FIGURA 58: Cálculo algébrico da área do círculo no GeoGebra.	110
FIGURA 59: Comando “Soma” e criação de lista com planilha no GeoGebra.	112
FIGURA 60: Cálculo direto na janela CAS do GeoGebra.	113
FIGURA 61: Pastilhas de cerâmica quadradas.	114
FIGURA 62: Pastilhas de cerâmica quadradas no GeoGebra.	115
FIGURA 63: Resolução da medida da moldura do banheiro no GeoGebra.	116
FIGURA 64: Ladrilhos nos tabuleiros de xadrez.	116
FIGURA 65: Resolução do problema do tabuleiro de xadrez no GeoGebra.	117
FIGURA 66: Controle deslizante na equação.	121
FIGURA 67: Planificação do cubo.	127
FIGURA 68: Caixa planificada.	128
FIGURA 69: Planificação da superfície lateral do Cilindro.	129
FIGURA 70: Cálculo algébrico da expressão na janela CAS.	131
FIGURA 71: Colcha de retalhos quadrangulares da tarefa 2.	135
FIGURA 72: Terreno em formato quadrangular do problema inicial.	136
FIGURA 73: Tarefa 1 realizada pela Dupla 2.	144
FIGURA 74: Tarefa 1 realizada pela Dupla 3.	145

FIGURA 75: Tarefa 1 realizada pela Dupla 4.....	146
FIGURA 76: Tarefa 1 realizada pela Dupla 5.....	148
FIGURA 77: Tarefa 2 realizada pela Dupla 2.....	150
FIGURA 78: Tarefa 2 realizada pela Dupla 3.....	151
FIGURA 79: Tarefa 2 realizada pela Dupla 4.....	152
FIGURA 80: Tarefa 2 realizada pela Dupla 5.....	153
FIGURA 81: Tarefa 2 realizada pela Dupla 6.....	154
FIGURA 82: Tarefa 3 realizada pela Dupla 5.....	156
FIGURA 83: Tarefa 3 realizada pela Dupla 6.....	157
FIGURA 84: Tarefa 3 realizada pela Dupla 7.....	158
FIGURA 85: Tarefa 3 realizada pela Dupla 8.....	159
FIGURA 86: Tarefa 4 realizada pela Dupla 2.....	161
FIGURA 87: Tarefa 4 realizada pela Dupla 6.....	162
FIGURA 88: Tarefa 4 realizada pela Dupla 8.....	163
FIGURA 89: Tarefa 4 realizada pela Dupla 9.....	164
FIGURA 90: Tarefa 0 realizada pela dupla 1.....	166
FIGURA 91: Tarefa 0 realizada pela dupla 3.....	168
FIGURA 92: Tarefa 0 realizada pela dupla 4.....	169
FIGURA 93: Tarefa 0 realizada pela dupla 5.....	170

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1: Aspectos que caracterizam as quatro fases.....	35
QUADRO 2: Descrição da unidade temática de álgebra para o 8º ano	44
QUADRO 3: Momentos da pesquisa.....	54
QUADRO 4: Planejamento das Tarefas.	58
QUADRO 5: Programa de produção de dados.	60
QUADRO 6: Categorias da BOA por etapas de assimilação.	62
QUADRO 7: Categorias das ações secundárias da TFEAM.....	64
QUADRO 8: Guia qualitativo de observação das categorias da ASPM.	65
QUADRO 9: Síntese dos resultados.	174

LISTA DE ABREVEATURAS E SIGLAS

ASPM – Atividade de Situações Problema em Matemática.

AVA – Ambiente Virtual de Aprendizagem.

BNCC – Base Nacional Comum Curricular.

BOA – Base Orientadora da Ação.

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

CIED – Centros de Informática Educacional.

DCNEM – Diretrizes Curriculares Nacionais.

EAD – Educação à Distância.

EDUCOM – Computadores na Educação.

EEML – Escola Estadual Monteiro Lobato.

ENCCEJA – Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos.

ENEM – Exame Nacional de Ensino Médio.

GPECIM – Grupo de Pesquisa em Ciências e Matemática.

LD – Livros Didáticos.

MEC – Ministério da Educação.

OCNEM – Orientações Curriculares Nacionais para Ensino Médio.

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais.

PE – Produto Educacional.

PIBID – Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência.

PNLD – Plano Nacional do Livro Didático.

PPGEC – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências.

PROINFO – Programa Nacional de Informática na Educação.

PRONINFE – Programa Nacional de Informática na Educação.

SAEB – Sistema de Avaliação da Educação Básica.

SD – Sequência Didática.

STEAM – Science, Technology, Engineering, Arts e Mathematics.

TCC – Trabalho de Conclusão de Curso.

TD – Tecnologias Digitais.

TFEAM – Teoria de Formação por Etapas das Ações Mentais.

TI – Tecnologia da Informação.

TIC – Tecnologia da Informação e Comunicação.

UERR – Universidade Estadual de Roraima.

UFRR – Universidade Federal de Roraima.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	15
MEMORIAL DE APROXIMAÇÃO AO TEMA.....	15
QUESTÃO NORTEADORA, OBJETIVOS E REVISÃO DE LITERATURA.....	21
1 PRESSUPOSTO TEÓRICO.....	25
1.1 FUNDAMENTOS COGNITIVOS NO ENSINO E APRENDIZAGEM.....	25
1.1.1 Atividade de Situações Problema em Matemática.....	27
1.2 CONTRIBUIÇÕES DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	29
1.3 O ENSINO DA ÁLGEBRA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL..	36
1.3.1 Particularidades das Equações Polinomiais do 2º Grau	37
1.4 COMPETÊNCIAS E HABILIDADES EM MATEMÁTICA PRECONIZADAS PELA BNCC.....	41
1.4.1 Abordagem da habilidade em Livros didáticos do PNLD-2020 para o 8º ano ..	46
2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	53
2.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA	55
2.1.1 Participantes da Pesquisa	56
2.2 UNIDADES DE ANÁLISES	57
2.2.1 Qualitativa	60
2.2.1.1 Atividade de Situações Problema em Matemática.....	61
2.2.1.2 Ações Primárias	62
2.2.1.3 Ações Secundárias ou Qualidades da Formação das Etapas	64
2.2.2 Observação do Processo de Formação das Habilidades	65
2.2.2.1 Guia de observação da Atividade de Situações Problema	65
2.3 INSTRUMENTOS DE PRODUÇÃO DE DADOS.....	66
2.3.1 Avaliação diagnóstica.....	66
2.3.2 Avaliação Formativa.....	68
2.3.3 Avaliação Final.....	68
3 PRODUTO EDUCACIONAL	70
3.1 O GEOGEBRA COMO MATERIAL DIDÁTICO	70
3.2 JANELAS DO GEOGEBRA	73
3.2.1 Janela de Álgebra	73
3.2.2 Janela de Visualização.....	84
3.2.3 Janela CAS	85
3.2.4 Janela de Visualização 3D	86
3.3 TECLADO ALFANUMÉRICO	95

3.4 BARRA DE SELEÇÃO DIRETA DAS JANELAS	97
3.5 BARRA DE MENU	102
3.6 TAREFAS PROPOSTAS COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA	103
3.6.1 Primeira Sequência de Tarefas	103
3.6.2 Segunda Sequência de Tarefas	110
3.6.3 Terceira Sequência de Tarefas	118
3.6.4 Quarta Sequência de Tarefas	120
3.6.5 Quinta Sequência de Tarefas	126
3.7 TAREFAS NO GEOGEBRA	133
3.7.1 Sequência Didática	133
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO	137
4.1 DIAGNÓSTICO INICIAL.....	137
4.1.1 Categorias e Observações	140
4.2 RESULTADOS DA AVALIAÇÃO FORMATIVA	143
4.2.1 Análise qualitativa sobre a Tarefa 1	144
4.2.2 Análise qualitativa sobre a Tarefa 2	149
4.2.3 Análise qualitativa sobre a Tarefa 3	155
4.2.4 Análise qualitativa sobre a Tarefa 4	160
4.3 RESULTADOS DA AVALIAÇÃO FINAL	165
4.4 SÍNTESE DOS RESULTADOS E AVALIAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL	172
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	176
REFERÊNCIAS	181
APÊNDICE A	189
APÊNDICE B	192
APÊNDICE C	194
APÊNDICE D	195
APÊNDICE E	200

INTRODUÇÃO

Atualmente, os acadêmicos dos cursos de licenciaturas têm a possibilidade de conhecer as práticas de sala de aula ainda durante a graduação, por meio do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID). Comigo¹ não foi diferente. Iniciei no curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Roraima (UFRR) em 2013, concluindo no ano de 2017 e, durante esse período, iniciaram as minhas experiências como professor de matemática.

MEMORIAL DE APROXIMAÇÃO AO TEMA

Em 2014, eu e outros quatro acadêmicos do curso desenvolvemos as atividades relacionadas ao PIBID na Escola Estadual Monteiro Lobato (EEML), localizada no centro de Boa Vista. As atividades eram fundamentadas por sequências de tarefas e direcionadas aos estudantes do 9º ano, que eram realizadas pelos pibidianos², tendo como coordenador do subprojeto no Ensino Fundamental o professor José Ivanildo de Lima e com a supervisão do professor Amarildo Moreira da Silva, professor de matemática na EEML.

No ano de 2015, solicitei a minha transferência para a Escola Estadual Voltaire Pinto Ribeiro, localizada na zona oeste de Boa Vista. Nessa escola, desenvolvemos atividades de Resolução de Problemas com turmas do 6º ano e tínhamos como supervisora a professora Miraselva Dantas Barbosa.

Em 2016, tive a oportunidade de ir para a Escola Estadual Maria das Dores Brasil, pois, nesse ano passamos a ter como coordenador do subprojeto no ensino médio o professor Héctor José Garcia Mendoza e como supervisor o professor Williams Souza Alencar. Nessa escola, desenvolvemos atividades, quase sempre relacionadas à álgebra, com o auxílio do *software* GeoGebra na 2ª série do Ensino Médio. O trabalho desenvolvido nessa escola possibilitou a apresentação oral do artigo intitulado “A utilização do *Software* GeoGebra como Auxílio nas Aulas de Matemática nas Turmas do 2º ano da Escola Estadual Maria das Dores Brasil”,

1 Inicialmente, usarei a 1ª pessoa do singular pois apresentarei a minha trajetória pessoal.

2 Expressão popular que se refere aos acadêmicos das licenciaturas que participam do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID).

durante o II Encontro de Matemática de Roraima e X Semana de Matemática da UFRR, eventos que ocorreram simultaneamente.

Por trabalhar com professores da Educação Básica no PIBID, desenvolvendo diversas atividades, comecei a me interessar pela área da Educação Matemática. Então, busquei um orientador para o meu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) na área da Educação Matemática. Nesse sentido, procurei os professores da área de Educação Matemática. O professor José Ivanildo de Lima prontamente aceitou me orientar na elaboração do TCC e me adicionou ao Grupo de Pesquisa em Ciências e Matemática (GPECIM) da UFRR. Como participante do GPECIM, comecei a me interessar pelas pesquisas em História da Educação Matemática.

No contexto da História da Educação Matemática, desenvolvi uma pesquisa que possibilitou uma análise da Proposta Curricular de Ciências de 1975 para a educação com foco nos livros didáticos de matemática do, até então, Território Federal de Roraima. Apresentando, assim, a monografia intitulada “O Ensino de Álgebra nos Livros Didáticos de 5ª a 8ª Séries, segundo a Proposta Curricular para Roraima (década de 1970)” e finalizando o curso de licenciatura em matemática em agosto de 2017. Ainda neste mesmo ano, participei da seleção do mestrado no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências (PPGEC) da Universidade Estadual de Roraima (UERR) dando continuidade às pesquisas.

Em 2018, ingressei no Mestrado apresentando como projeto de pesquisa uma proposta baseada em minha monografia da graduação, gerando a possibilidade de dar continuidade a pesquisas em História da Educação Matemática. Entretanto, considerando que o Mestrado Profissional do PPGEC exige a elaboração de um Produto Educacional (PE), tivemos de mudar a temática do projeto de pesquisa, pois o projeto não possibilitava a criação de um PE voltado para o ensino em sala de aula.

Diante dessa situação, sob a orientação da professora Solange Mussato, fui levado a pensar em outras possibilidades de elaboração de um novo projeto de pesquisa. A primeira possibilidade de tema, apontado por mim, foi a Gamificação, uma tendência atual que está pautada em jogos que auxiliam no engajamento de estudantes na aprendizagem. Mas, como havia lido alguns poucos trabalhos que tratavam dessa temática, não estava seguro em pesquisar sobre Gamificação no ensino de matemática, que era um tanto distante do contexto das escolas estaduais de Boa Vista. Daí, começamos a pensar em outras temáticas.

Assim, recordando de toda a minha trajetória acadêmica e sobre o que me traria segurança em pesquisar fui remetido, então, ao uso do *software* GeoGebra nas ocasiões das atividades realizadas durante o PIBID. Assim, ficou decidido que utilizaríamos o GeoGebra como recurso tecnológico de ensino da matemática em minha futura pesquisa. Daí, ponderei que aspirava pesquisar os processos de ensino e de aprendizagem da matemática com a utilização de Tecnologias Digitais (TD)³.

O GeoGebra é um *software* de geometria dinâmica conhecido mundialmente. Há uma comunidade⁴ composta de professores e pesquisadores de diversos países que compartilham materiais didáticos. O GeoGebra encontra-se em constante atualização e é utilizado em várias instituições educacionais brasileiras, principalmente, nos Ensinos Médio e Superior.

Há um número expressivo de teses, dissertações e artigos que tratam do ensino e da aprendizagem, cuja pesquisa, conta com a utilização desse *software*. Porém, em se tratando de ensino básico, são pesquisas que estão relacionadas à Álgebra e à Geometria voltadas ao Ensino Médio ou à Geometria no Ensino Fundamental.

Ao buscarmos⁵ livros, teses, dissertações e artigos que tratam da Educação Matemática, especificamente, de ensino e aprendizagem de matemática com TD, verificamos que há uma gama de pesquisas que tratam dessa temática. Tais leituras suscitaram algumas inquietações que podem ser traduzidas pelas indagações: De que forma se deu a inserção do computador nas escolas brasileiras? Quais implicações da inserção do computador na escola? Como ocorreram as primeiras iniciativas de ensinar matemática com TD? Quais são as TD mais utilizadas no ensino de matemática? Em quais anos/séries estas TD são mais utilizadas? Estas indagações são relevantes a partir de um contexto histórico do ensino de matemática com TD, porém, este não será o foco da pesquisa. Entretanto, tais indagações nortearam a definição do objeto dessa pesquisa.

3 Termo aqui utilizado para englobar todos os tipos de tecnologias, quer sejam softwares, quer sejam mídias digitais.

4 <https://www.geogebra.org/people>

5 A partir desse momento usaremos a 1ª pessoa do plural, pois, trata-se do trabalho em conjunto entre pesquisador e orientadora.

Desse modo, consideramos desenvolver uma pesquisa com o uso de TD, ou seja, o *software* GeoGebra. E, também ponderamos que a BNCC (BRASIL, 2018) do Ensino Fundamental, a qual se propõe o currículo comum da Educação Básica para toda a rede educacional em território nacional.

E, assim, ao ponderarmos o componente curricular de matemática na BNCC (BRASIL, 2018), a fim de conhecer o que preconiza a base para os processos de ensino e aprendizagem em matemática, particularmente, nos anos finais do Ensino Fundamental.

A BNCC visa assegurar que os estudantes desenvolvam competências gerais e habilidades a serem desenvolvidas para cada objeto de conhecimento. Dentre as 10 competências gerais destacamos a competência número 5, na qual fica explícito o que se espera dos estudantes e professores ao ensinar e aprender com tecnologias, destacando que devem: compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação.

Nessa perspectiva, percebemos a importância de realizar uma pesquisa que pudesse identificar de que forma os estudantes desenvolvem habilidades, mais especificamente, habilidades matemáticas utilizando TD. Contudo, ainda nos faltava elementos para definir essa investigação. Por exemplo, tínhamos que definir qual seria a habilidade a ser desenvolvida pelos alunos, a temática a abordar, assim como, o ano escolar do Ensino Fundamental, em que desenvolveríamos a pesquisa.

Diante desses impasses, inicialmente, buscamos identificar qual assunto matemático, na BNCC (BRASIL, 2018) descrita como unidade temática, utilizaríamos nesta pesquisa. Para tanto, consideramos, inicialmente, a álgebra e a geometria, uma vez que o GeoGebra é um *software* que possibilita explorá-las de forma dinâmica.

Em seguida, realizamos um levantamento de pesquisas que tratava do uso do GeoGebra nos anos finais do Ensino Fundamental, a fim de identificar a unidade temática que apresentava mais necessidade de pesquisa. Esse levantamento apontou poucas pesquisas envolvendo o ensino de álgebra com TD nos anos finais do Ensino Fundamental. Além disso, consideramos que a Álgebra, segundo a BNCC (BRASIL, 2017, p. 268, grifo nosso)

tem como finalidade o desenvolvimento de um **tipo especial de pensamento** – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de

grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos.

Diante disso, optamos em focar a nossa pesquisa para o ensino de Álgebra. E, ainda, analisando a BNCC (BRASIL, 2018) e as pesquisas desenvolvidas, optamos em realizar a nossa pesquisa no 8º ano do Ensino Fundamental, pois, na BNCC (BRASIL, 2018), esse ano escolar apresenta um número mais expressivo de habilidades a serem desenvolvidas em álgebra, em relação aos demais anos finais do Ensino Fundamental. Além disso, é no 8º ano que se introduz veementemente os conceitos algébricos essenciais para os anos seguintes, tais como: a linguagem algébrica e o pensamento algébrico, essenciais para a interpretação de problemas.

A partir daí nos restou definir apenas o objeto de conhecimento⁶ ou a habilidade para fecharmos a temática da pesquisa. Ao fazermos uma análise das habilidades apresentadas na unidade de álgebra no 8º ano, consideramos a importância de utilizarmos a resolução de problemas, pois, conforme a BNCC (BRASIL, 2018), faz-se necessário que os estudantes desenvolvam habilidades, em muitas delas, resolvendo e elaborando problemas.

Assim, dentre as oito habilidades previstas na Unidade de Álgebra no 8º ano, O objeto de conhecimento da unidade temática álgebra para o 8º ano, consideramos a habilidade de resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ (BRASIL, 2018, p. 312-313) por focar essencialmente no uso de TD para resolver e elaborar problemas. Dessa forma, fomos delineando o objeto da nossa pesquisa: O uso do *software* GeoGebra para o desenvolvimento de habilidade de resolver e elaborar problemas com equações polinomiais do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, da temática álgebra no 8º ano do Ensino Fundamental.

Assim, o GeoGebra será utilizado para resolução de problemas com equações polinomiais do 2º grau do tipo $ax^2 = b$. O GeoGebra permite uma variedade de ações e por esse motivo é considerado por pesquisadores como um *software* Construcionista e Instrucionista⁷. Pois, segundo Barros e Stivam (2012, p. 192) “[...] o

6 Objeto de conhecimento é equivalente a conteúdo, conforme a BNCC (BRASIL, 2018).

7 Termos utilizados por Seymour Papert (1986). O Construcionismo prevê que por meio do computador (*software*) a criança pode desenvolver seu próprio conhecimento, enquanto o Instrucionismo faz com que a criança apenas siga instruções do computador (*software*).

uso do *software* GeoGebra que permite a ocorrência dessas ações, a partir da interação do sujeito com o computador, também promove a aprendizagem Construcionista”.

Papert (1986) utiliza o conceito de debugging (depuração) para dizer que o estudante busca compreender o erro para depois corrigi-lo. Assim, o erro passa a conduzir o estudante a uma nova aprendizagem a partir das tentativas de compreender. A abordagem construcionista, também tratada como teoria, aponta que por meio de ações realizadas no computador, o estudante constrói seu aprendizado (desenvolve habilidades). Portanto, as tarefas que serão desenvolvidas para os estudantes no desenvolvimento da habilidade em equação polinomial do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, abarcarão a resolução de problemas.

Todavia, faltava-nos a teoria e um método para sustentar os nossos fundamentos quanto à realização de atividades e da resolução de problemas. Para tanto, utilizaremos o método da Atividade em Situações Problema em Matemática (ASPM) (MENDOZA, 2009), que está sustentada pela Teoria de Formação por Etapas das Ações Mentais (TFEAM), elaborada por Galperin (1986). E, segundo Mendoza e Delgado (2017, p. 11) a TFEAM é “formado por um sistema de ações invariantes que tenham como objetivos criar habilidades na resolução de problemas matemáticos [...]”.

Mendoza e Delgado (2017, p. 14) ainda descrevem a importância da ASPM expondo que é uma metodologia capaz de resolver diversos problemas que apresentem modelos matemáticos. Dependendo da complexidade do conteúdo, se dermos início pela orientação das ações da ASPM por problemas heurísticos, levando em consideração os conhecimentos prévios dos estudantes, estes desenvolverão habilidades na resolução de problema e que, posteriormente, serão assimilados.

Na TFEAM busca-se que o estudante, conforme uma sequência de ações que por sua vez são compostas por operações, construa seu próprio conhecimento (desenvolva habilidades) e seja agente ativo nos processos de ensino e de aprendizagem. O Construcionismo de Papert também busca desenvolver as habilidades, mas com a utilização do computador para esse fim. Portanto, com a TFEAM, o GeoGebra e a ASPM definidos para a pesquisa, cabe trazer a questão que norteou a pesquisa, os objetivos a serem alcançados e uma justificativa.

QUESTÃO NORTEADORA, OBJETIVOS E REVISÃO DE LITERATURA

A questão que norteou a pesquisa foi: **De que forma a utilização do software GeoGebra, por meio da Atividade de Situações Problema em Matemática como metodologia de ensino possibilita o desenvolvimento da habilidade de resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$?**

O objetivo geral consistiu em: analisar as contribuições do *software* GeoGebra no desenvolvimento da habilidade de resolver e elaborar problemas sobre equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ por meio da Atividade de Situações Problema. E, os objetivos específicos foram: Analisar a contribuição do Esquema da Base Orientadora Completa da Ação da Atividade de Situações Problema em equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$; Analisar a representação e resolução de equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ pelos estudantes no GeoGebra; Identificar o nível de interação dos estudantes com o GeoGebra; Identificar o desenvolvimento das habilidades nos estudantes ao resolver e elaborar equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ no GeoGebra.

Para que a pesquisa tivesse êxito, foi necessário que a escola dispusesse de: uma turma do 8º ano para a intervenção; um laboratório de informática bem equipado e com o quantitativo de máquinas necessárias funcionando e de um Datashow. Esses são recursos simples e, que contém em todas as escolas estaduais do município de Boa Vista, mas, conforme visitas e passagens por algumas escolas, sabíamos que haveria a possibilidade do laboratório de informática não estar em pleno funcionamento.

Para que não ocorresse a possibilidade da escola não ter os recursos disponíveis para a realização da pesquisa, foram feitas visitas às escolas que atendiam aos requisitos, colocados no parágrafo anterior, ou seja, a escola escolhida seria aquela que melhor se encaixasse nos requisitos estabelecidos.

Definidos os objetivos da pesquisa, avançamos para uma revisão de literatura, a fim de identificarmos a relevância da nossa pesquisa. Assim, realizamos buscas por pesquisas relacionadas ao GeoGebra e realizadas no período de 2006 a 2018, no site da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Identificamos que há um significativo número de pesquisas voltadas para o ensino de

Geometria. Com relação ao ensino de álgebra, as pesquisas se concentram no Ensino Médio. Ou seja, é pequeno o número de pesquisas que envolvem o GeoGebra no ensino de álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental, comparado com o Ensino Médio.

A fim de refinarmos a nossa revisão de literatura, buscamos, na CAPES, por teses e dissertações que envolvem o tema da pesquisa realizada. Para tanto, buscamos por palavras-chave como: Atividade de Situações Problema, GeoGebra, 8º ano, Base Nacional Comum Curricular e álgebra. Assim, obtivemos mais de cem mil resultados. Para refinar ainda mais a nossa pesquisa, inserimos o termo BNCC, considerando sua relevância no atual contexto educacional, além da mesma se mostrar presente em nossa pesquisa, em função utilizarmos uma das habilidades preconizadas por ela.

E, encontramos até então, um pouco mais de 160 pesquisas, sendo a sua grande maioria, relacionada ao “Letramento Matemático” ou com enfoque crítico à BNCC (BRASIL, 2018). Assim, buscamos detalhar ainda mais a pesquisa utilizando filtros como: “Educação”, “Educação Matemática”, “Ensino”, “Ensino de Ciências e Matemática” e “Matemática”. Obtivemos 74 resultados (67 dissertações e 7 teses). Dentre estas, duas dissertações se aproximam do tema proposto. Uma trata do “Pensamento Algébrico no currículo” (LIMA, 2018) e outra, trata da “Utilização de Tecnologia (GeoGebra) para o ensino de Estatística no Ensino Fundamental II” (NASCIMENTO, 2017).

Assim, constatamos a necessidade de pesquisa sobre o ensino e aprendizagem de álgebra no Ensino Fundamental anos finais para desenvolvimento de habilidades preconizadas pela BNCC (BRASIL, 2018) tendo como recurso o *software* GeoGebra. Outro fator que nos levou a escolha do tema foi a experiência vivida durante a graduação no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) em 2016, na Escola Estadual Maria das Dores Brasil, na 2ª série do Ensino Médio, com projetos envolvendo o GeoGebra.

A experiência no PIBID, por conseguinte, ocasionou a escolha do GeoGebra como instrumento para a realização desta pesquisa. E foi o que, também, contribuiu para o delineamento da sua fundamentação teórica e de sua metodologia.

A metodologia foi composta por momentos de uma avaliação diagnóstica, avaliação formativa e avaliação final. Para tanto, foram utilizados: um Material Didático (tutorial do GeoGebra) disponibilizado pelo pesquisador e os computadores e o Datashow disponibilizados pela escola.

Desse modo, entende-se que os resultados desta pesquisa contribuirão para o desenvolvimento de atividades utilizando TD para o ensino de álgebra no 8º ano do Ensino Fundamental. Assim, poderá auxiliar professores em suas práticas a fim de possibilitar aos estudantes o desenvolvimento de habilidades matemáticas. Dessa forma, vislumbramos a relevância dessa pesquisa, uma vez que possibilitará a consolidação do *software* GeoGebra como uma importante tecnologia educacional e a valorização do computador na escola, tanto para professores de matemática, como para os estudantes.

O capítulo 2 que descreve o Pressuposto Teórico compreende os fundamentos cognitivos no ensino e aprendizagem e ASPM que são fundamentais para o desenvolvimento de habilidades. Há também, as contribuições das tecnologias digitais na educação matemática, o ensino da álgebra nos anos finais do ensino fundamental e as particularidades das equações polinomiais do 2º grau. Além disso, coube tratar das competências e habilidades em matemática preconizadas pela BNCC e da abordagem da habilidade de resolver e elaborar problemas por equações do tipo $ax^2 = b$ em livros didáticos do PNLD-2020 para o 8º ano.

No capítulo 3, foram elencados os Procedimentos Metodológicos dados pela caracterização da pesquisa, dos participantes da pesquisa e das unidades de análises. A pesquisa seguiu no enfoque qualitativo por Atividade de Situações Problema em Matemática caracterizadas por suas ações primárias e secundárias (qualidades da formação das etapas).

Ainda na metodologia, foram observados os processos de formação das habilidades dados pelos guias para a observação da Atividade de Situações Problema e para a observação da formação qualitativa das ações mentais. Os instrumentos de produção de dados utilizados foram: uma avaliação diagnóstica, item que serviu apenas para sondagem do ponto de partida dos estudantes; a avaliação formativa, composta de quatro tarefas e a avaliação final, em que, foi utilizado uma situação problema mais complexa.

No capítulo 4 constam os Resultados e Discussões acerca do diagnóstico inicial, das categorias e observações, das avaliações formativas e final em cada uma das tarefas que as compunham. E, também foi realizada uma síntese dos resultados e uma breve avaliação das possibilidades de aplicação do Produto Educacional. O PE também consta no capítulo 4 e está constituído por um tutorial do GeoGebra, cinco sequências de tarefas propostas com auxílio do GeoGebra e uma Sequência Didática que contém as tarefas aplicadas durante a pesquisa.

1 PRESSUPOSTO TEÓRICO

No Brasil, tratando-se de Educação Matemática por meio de recursos computacionais, destacamos as obras: “Informática e Educação Matemática” (BORBA; PENTEADO, 2012) e “Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: Sala de aula e internet em movimento” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018). São obras que retratam de forma concisa a história da inserção dos computadores nas escolas brasileiras e do ensino de matemática com TD.

Nesse contexto, discorreremos brevemente sobre a história da inclusão de tecnologias computacionais⁸ nas escolas brasileiras, as quatro fases das tecnologias digitais em Educação Matemática e do ensino de matemática com o GeoGebra. São fatos históricos que transcorrem desde a década de 80 até os dias atuais, apresentando de que maneira as TD, voltadas ao ensino de Matemática, foram inseridas nas escolas do Brasil.

Também, são apresentados os princípios básicos da TFEAM, (MENDOZA, 2009a, 2009b; NÚÑEZ, 1997, 2009); da ASPM (MENDOZA; DELGADO, 2011, 2016, 2017, 2018) e da BNCC (BRASIL, 2018) que tratam, primordialmente, das habilidades. Ainda, trataremos do ensino de álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental, assim como, das particularidades das equações polinomiais do 2º grau.

1.1 FUNDAMENTOS COGNITIVOS NO ENSINO E APRENDIZAGEM

Entre uma miríade de outras teorias que ganham destaque por tratarem dos processos de aprendizagem por meio de estímulos cognitivos destacam-se: o cognitivismo, o construtivismo, o interacionismo, socioculturais e sociocognitivas.

A teoria histórico-cultural elaborada por Vygotsky preocupava-se em examinar, compreender e explicar todas as complexidades do desenvolvimento humano, atribuindo elementos que constituem sua realidade objetiva e atribuindo os significados que existem na vida em sociedade. Vygotsky (1991) enfatiza que a partir do momento em que nasce, o sujeito passa a fazer parte de um mundo moldado pela

⁸ Termo utilizado por Borba e Penteado (2012), no entanto, será utilizado o termo “Tecnologias Digitais (TD)”.

história, pela cultura construída e organizada pelas gerações anteriores, e que sua vida está sendo moldada de diferentes maneiras em cada aspecto.

O desenvolvimento histórico da humanidade, a mudança e o desenvolvimento ocorreram não apenas nas relações externas entre as pessoas e na relação entre o homem e a natureza; o próprio homem, sua natureza, mudou e se desenvolveu (VYGOTSKY, 1991, p. 97).

À medida que o sujeito se apropria dos elementos culturais criados pela humanidade e passa a interagir, o sujeito emprega uma série de ideias e conceitos que o ajudarão a expandir e refinar sua relação e compreensão do mundo em que está inserido.

Vygotsky (1991) apresenta a Zona de Desenvolvimento Proximal como sendo a distância entre o nível real de desenvolvimento, que consiste em um conjunto de ideias já consolidadas pelo sujeito, que lhe permite realizar tarefas de forma autônoma, e o nível de desenvolvimento potencial, caracterizado pelo conhecimento que estariam desenvolvendo com ideias imaturas. O conceito de zona de desenvolvimento proximal foi desenvolvido por Vygotsky para discutir e explicar essa relação entre desenvolvimento e aprendizagem.

Segundo Vygotsky (1991), os momentos de aprendizagem vividos pelo sujeito e orientados por sujeitos mais experientes garantem mudanças qualitativas e o processo de desenvolvimento da meta individual de aprendizagem escolar no processo de desenvolvimento do aluno.

Contudo, Talízina (1988, p. 250) expõe que “há necessidade de analisar, de forma minuciosa e direta, a teoria histórico-cultural de Vygotsky” e expressa que não são apenas conceitos, significados, signos ou instrumentos, mas o conjunto de ações reais do sujeito que une seu corpo à realidade que o cerca. O que determina o desenvolvimento de sua capacidade de pensamento como um todo são as funções mentais.

Segundo Mendoza e Delgado (2018), a teoria que se iniciou com as obras de Vygotsky se baseia na filosofia do materialismo e tem sua base epistemológica nas obras de Lenin (1975), Materialismo e Empiriocrítica, que, entre outras coisas, lidam com as ações mentais humanas, são efeitos do mundo exterior ao seu redor, mas que com ele há uma relativa independência da consciência humana enquanto o ser humano começa a se desenvolver psicologicamente.

Leontiev (2004) enfatiza que o aluno interage com o mundo por meio de uma atividade que consiste em ações com suas respectivas operações para atingir um objetivo a ser alcançado. De acordo com Mendoza e Delgado (2018), essas ações representam o fator principal no ensino. Deste modo, o objetivo e a motivação devem estar relacionados de forma a justificar uma atividade de estudo.

Mendoza e Delgado (2018) trazem que o conceito de atividade surge como base fundamental para a compreensão da formação psíquica. De acordo com Leontiev (2004), a atividade é um fator prático que conecta o sujeito com o mundo ao seu redor conectando o sujeito e objeto a ser conhecido.

Porém, trazendo para o contexto escolar, Mendoza e Delgado (2018) apontam que essas etapas do desenvolvimento do aluno não têm conteúdo e sequências temporais. Para Leontiev (2004), as condições históricas têm forte influência no conteúdo específico da educação e acredita que todo o processo de assimilação e apropriação do contexto histórico e cultural humano é a fórmula de reprodução das características e habilidades que constituem a formação histórica da pessoa.

1.1.1 Atividade de Situações Problema em Matemática

A Atividade referida na pesquisa diz respeito ao conceito desenvolvido por Leóntiev e, posteriormente, assumido por Galperin, e está definida como sendo um sistema de ações, em que cada ação é composta por um sistema de operações para se alcançar um objetivo. “A atividade é movida pelo motivo (material ou ideal), as ações pelo objetivo e as operações se originam pelas condições da atividade, mas o motivo pode influenciar nas ações para alcançar o objetivo” (MENDOZA; DELGADO, 2017, p. 12). E, os autores ainda descrevem que:

As habilidades são o produto da sistematização das ações por parte do sujeito de forma consciente em condições tais que permitam um constante desenvolvimento e os hábitos constituem a assimilação dos aspectos estruturais da atividade que são as operações. Ou seja, as habilidades são ações sistemáticas não automatizadas, enquanto os hábitos são operações sistemáticas automatizadas. O surgimento dos hábitos tem como base as habilidades, mas necessariamente não todas as habilidades se convertem em hábitos. (MENDOZA; DELGADO, 2017, p. 12).

Mendoza e Delgado (2017, p. 13) colocam que a Atividade de Situações Problema em Matemática (ASPM) foi desenvolvida com objetivo de resolver situações problema em situações de ensino e aprendizagem com interação da tríade professor, estudante e situação problema. Isso permitiu a utilização da resolução de problema

(Polya, 1975) como metodologia de ensino, tecnologias (digitais ou não) e outros recursos didáticos que facilitem a assimilação.

A ASPM é formada por quatro ações (Compreender o problema, construir o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução), cada uma com suas respectivas operações, permitindo solucionar uma variedade de problemas matemáticos. Conforme Mendoza e Delgado (2017, p. 13), as quatro etapas estão definidas como:

Compreender o problema: suas operações sinteticamente se resumem em ler o problema e extrair elementos conhecidos e desconhecidos; analisar os dados e condições e definir os objetivos do problema.

Construir o modelo matemático: suas operações necessariamente determinar as variáveis e/ou incógnitas; indicar todas variáveis e incógnitas; estabelecer as unidades de medidas, caso houver; formar um modelo matemático (fórmula ou algoritmo) considerando variáveis, incógnitas e condições do problema e analisar as unidades de medidas que envolvem o problema.

Solucionar o modelo matemático: consiste em selecionar um ou mais métodos para resolver o modelo matemático; selecionar uma tecnologia digital, por exemplo, o GeoGebra, contendo todos os recursos necessários para resolver o modelo e por fim solucionar o modelo matemático.

Interpretar a solução: é a última, porém, a mais importante com relação ao desenvolvimento de habilidades, pois consiste em interpretar o resultado; extrair os resultados significativos; rebater ou não os objetivos do problema; refletir sobre os objetivos do problema; analisar novos dados e condições que possibilitam a reformulação e construção de um novo modelo matemático, solucioná-lo e interpretá-lo.

Portanto, a ASPM e o GeoGebra tornam-se essenciais à pesquisa, pois, pela ASPM, em suas quatro ações, possibilitará desenvolver e analisar todas as etapas relacionadas a TFEAM. Da mesma forma, o GeoGebra por ser considerado um *software* construcionista, oferecendo aos estudantes a manipulação e execução de uma variedade de comandos, que podem ser feitos e refeitos (ações e operações), o que faz com que o estudante reflita sobre o que acontece durante e ao final do processo, desenvolvendo habilidades, tanto no conteúdo matemático quanto na

tecnologia digital. Ainda com relação à ASPM, Mendoza e Delgado (2017, p. 13) complementam expondo que:

A Atividade de Situações Problema (ASP) em Matemática está orientada pelo objetivo de resolver situações problema na zona de desenvolvimento proximal num contexto de ensino aprendizagem onde existe uma interação entre o professor, o estudante e a situação problema, utilizando a resolução de problema em Matemática como metodologia de ensino, a tecnologia disponível e outros recursos didáticos, para transitar pelos diferentes estados do processo de assimilação.

A partir da ASPM foram construídas as atividades de situações problema em equações polinomiais do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, objeto de conhecimento da temática álgebra, preconizadas na BNCC (BRASIL, 2018) para o 8º ano do Ensino Fundamental.

1.2 CONTRIBUIÇÕES DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Hoje, os estudantes por serem considerados nativos digitais⁹, vemos que a interação aluno-máquina poderá ocorrer de forma rápida e eficiente quanto à utilização dos comandos do GeoGebra. Com isso, a presente pesquisa trará uma interação entre professor, estudante e situações problema e, também, a inclusão do GeoGebra como tecnologia como fator que intensifica a interação estudante e máquina (computador).

O GeoGebra não é o principal *software* matemático e muito menos o primeiro a ser utilizado na educação. A introdução do computador nas escolas contribuiu para a criação de *softwares* educacionais para o ensino de matemática. O LOGO, Cabri Géomètre, Geometriks, Winplot, Maple entre outros, compõem essa tendência. Cabe, então, destacar um contexto histórico do ensino de matemática com auxílio de TD.

Borba e Penteado (2012) fazem uma discussão sobre a forma que a tecnologia tem sido utilizada e a sua implicação na sociedade atual. Discorrem sobre a iniciativa de implementação da informática nas escolas, por meio de ações governamentais. Assim, em 1981, com a realização do I Seminário Nacional de Informática Educativa

9 Segundo Prensky (2001), são crianças nascidas dentro de um ambiente com tecnologias digitais como computadores, celulares, jogos e programação, ou seja, são habilidades adquiridas e aperfeiçoadas através de anos de interação com tecnologias.

surgiram projetos como o Computadores na Educação (EDUCOM), o Formar e o Programa Nacional de Informática na Educação (PRONINFE).

Mas, foi a partir da década de 90 que o ensino com computadores se tornou possível. Os professores de matemática começavam a utilizar *softwares* como: Cabri II, Supermáticas, Fracionando, Divide and Conquer, Excel, Factory e Bulding Perspective, porém, era necessário capacitar os professores. (BORBA; PENTEADO, 2012, p. 21-22).

Com o intuito de formar profissionais na área de informática educativa, por iniciativa da EDUCOM deu-se início ao projeto Formar, primeiro em 1987 com o Formar I e, em 1989, com o Formar II. Para tanto, foram criados em 17 cidades brasileiras os Centros de Informática Educacional (CIED) que ofereciam cursos de especialização. Para dar continuidade ao projeto, foi criado pelo Ministério da Educação (MEC), em 1989, o PRONINFE que contribuiu para criação de laboratórios e centros de capacitação de professores.

Após as experiências com o Formar e o Proninfe, em 1997 foi lançado o Programa Nacional de Informática na Educação (PROINFO), programa responsável pela introdução da informática nas escolas da Educação Básica em todo o Brasil. Para equipar mais de 2000 escolas e investir na formação de professores, o MEC fez parcerias com ministérios, governos municipais e estaduais, organizações governamentais e não governamentais e empresas. O programa visava equipar a escola com um computador para cada 25 estudantes (BORBA; PENTEADO, 2012, p. 21).

Mesmo com os computadores disponíveis nas escolas e com professores capacitados para ensinar com auxílio do computador, Borba e Penteado (2012, p. 21) chamam a atenção para a necessidade de um técnico. E apontam que,

Ainda dentro da infraestrutura é preciso pensar no apoio técnico. Um técnico em informática deveria fazer parte do quadro de funcionários da escola. Não é possível desenvolver qualquer atividade com computadores que apresentam problemas com o monitor que não liga, a impressora que não imprime, conflito de configurações na rede, os softwares que desaparecem e os vírus [...].

Todavia, pode-se verificar a falta de técnicos em informática em várias escolas do Estado de Roraima, ou seja, mesmo com os avanços tecnológicos na educação, internet mais veloz e profissionais capacitados os laboratórios encontram-se sucateados e, em muitos casos, professores sem a devida capacitação técnica são

designados para cuidar do laboratório, o que acarreta a impossibilidade de uso do laboratório de informática.

Com relação às experiências com TD em Educação Matemática, Borba e Penteado (2012) destacam que a calculadora gráfica, na década de 90, foi objeto de muitas pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem com tecnologia, a qual, aglutinava *softwares* como o Excel na construção de planilhas eletrônicas; FUN no estudo de funções; Graphmatica também para estudo de funções e outros.

Borba e Penteado (2012) ainda acrescentam que a calculadora gráfica permitia cálculos algébricos e possibilitava aos estudantes conjecturar. Diante desse fato, as pesquisas sob o enfoque experimental estimularam, em meados dos anos 2000, a interação homem e máquina na geração de gráficos, tabelas e expressões algébricas com o surgimento de *softwares* de geometria dinâmica como o Geometricks, Cabri e outros.

Com as inovações tecnológicas crescendo em ritmo acelerado desde o final da década de 1970, e tendo intensificado com o surgimento do computador, muitos funcionários foram demitidos de indústrias por serem substituídos por máquinas computadorizadas. Isso ocasionou implicações na prática docente, pois, os professores, ditos imigrantes digitais¹⁰, temiam serem substituídos. Esse mito foi quebrado após diversos estudos e experiências, porém, ainda existem professores que resistem às tecnologias na sua prática (BORBA; PENTEADO, 2012, p. 55-56).

Ao considerar as possibilidades, os limites e o acesso, Borba e Penteado (2012, p. 87) expõem que,

[...] No momento em que os computadores, enquanto artefato cultural e enquanto técnica, ficam cada vez mais presentes em todo o domínio da atividade humana, é fundamental que eles também estejam presentes nas atividades escolares. Na escola, a alfabetização informática precisa ser considerada como algo tão importante quanto a alfabetização da língua materna e em matemática.

É fato que, atualmente, muitas instituições de ensino estão vivenciando experiências com novas tecnologias como, por exemplo, a robótica nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Porém, há relatos de professores que sequer utilizam

10 Segundo Prensky (2001), são pessoas nascidas antes ou durante a criação das TD ou que, até mesmo, nunca tiveram oportunidade de acesso às tecnologias e que têm dificuldades ou se esforçam para utilizar certas tecnologias.

computadores em suas aulas e, mesmo com capacitação, ainda são poucos os que utilizam, com a alegação de não terem tempo suficiente para planejar uma aula com uso de tecnologias ou que o calendário escolar não permite fazê-lo.

Atualmente, a humanidade está vivenciando a Revolução da Comunicação por meio das mídias sociais. Desse modo, a cada dia surgem novas e melhoradas tecnologias como: linguagens de programação, sistemas operacionais, *softwares*, aplicativos e redes sociais, além de equipamentos portáteis com maior capacidade de processamento e armazenamento como os celulares smartphones, notebooks, tablets, dentre outros. Arelada a essa evolução tecnológica, Borba (2012) estruturou em quatro fases o uso de tecnologias na Educação Matemática no Brasil (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018, p. 21-22).

A primeira fase abrange a década de 1980 com a discussão sobre o uso de calculadoras simples, científica e computadores. Esta fase caracteriza-se pelo uso do *software* LOGO¹¹ e pelo surgimento de uma perspectiva de inclusão de laboratórios de informática nas escolas pela EDUCOM. Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018, p. 23) descrevem sobre o LOGO que,

Cada comando do LOGO determina um procedimento a ser executado por uma tartaruga (virtual). Os movimentos da tartaruga, como passos e giros, possibilitam a construção de objetos geométricos como segmentos de reta e ângulos. A natureza investigativa do LOGO diz respeito a construção de sequências de comandos (um algoritmo) que determina um conjunto ordenado, ou sequencial, de ações que constituam a figura geométrica.

O LOGO, embora tenha sido utilizado em algumas escolas no Brasil, infelizmente, não se tornou popular. Contudo, a linguagem LOGO ainda pode ser encontrada em alguns sites e, também, no GeoGebra Classic 6, por meio do comando “tartaruga”.

A segunda fase teve início na primeira metade da década de 1990, com o surgimento de diversos *softwares* educacionais voltados às representações de funções (Winplot, FUN, Graphmathica), geometria dinâmica (Cabri Géomètre e Geometricks) e sistemas de computação gráfica (Maple) (BORBA; SCUCUGLIA;

¹¹ Software baseado no Construcionismo (Papert, 1986). Linguagem de programação projetada por Wally Feurzeig, Seymour Papert e Cynthia Solomon (1967). Inicialmente era um triângulo, e Papert (1986) ao ver que a criança confundiu o triângulo com uma tartaruga, resolveu mudá-la vendo que a imagem da tartaruga dava mais significado à compreensão da criança. Inserindo a Metáfora de “ensinar a tartaruga”.

GADANIDIS, 2018, p. 22-35). A geometria dinâmica ganha destaque nesta fase, pois, as atividades desenvolvidas no Cabri Géomètre ou Geometricks apresentavam a “prova do arrastar”.

Neste aspecto, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018, p. 28) expõem que,

[...] nós pensamos-com-tecnologias, ou seja, a natureza dos problemas e da atividade matemática está em simbiose com o design das tecnologias que utilizamos, [...] que usamos para fazer sentido a conceitos e produzir conhecimento matemático.

Também, devem ser levados em consideração os *softwares* Winplot, Derive e Graphmatica, por possibilitarem a exploração, em vários níveis de ensino, de novos tipos de problemas e atividades matemáticas (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018, p. 27-31).

A terceira fase teve início por volta de 1999 com a chegada da internet, quando começam a ser utilizados os termos Tecnologia da Informação (TI) e Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC). E, também é o período em que a Educação à Distância (EAD) começa a ganhar força com o advento de e-mails, chats, fóruns de discussão e compartilhamento de arquivos, o que acabou aproximando os participantes (professores e estudantes) às TIC.

Além disso, eram realizadas atividades de investigação com o Winplot, em que, por meio de um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) foi possível a exploração de diversas soluções gráficas e algébricas. A partir de então os AVA começaram a ser fundamentais para uma educação online de qualidade, pois, permite a interação síncrona entre tutores e estudantes proporcionada por chats, fóruns de discussão e compartilhamento de arquivos.

Na quarta fase, iniciada a partir do ano de 2004 e que se mantém até os dias atuais, as TD são caracterizadas por seus aspectos e, com relação ao uso dessas tecnologias na Educação Matemática, destacam-se: GeoGebra, Multimodalidade, Novos designs e interatividade, Tecnologias móveis ou portáteis, Performance online e Performance matemática digital (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018, p. 39-41).

Ainda, pode-se destacar os recursos que possibilitam as metodologias ativas como o Moodle, o Facebook, os applets, o Design Instrucional e outros que facilitam a interação e a aprendizagem e, possibilitam o feedback imediato. Borba, Scucuglia e

Gadanidis (2018, p. 41), destacam ainda que: “A quarta fase é um cenário exploratório, fértil ao desenvolvimento de investigações e à realização de pesquisas”. Os autores, também, chamam atenção para o fato de não haver sobreposição entre as fases.

No que diz respeito ao uso de tecnologias digitais no ensino de matemática, Borda (1999) apoiando-se em Lévy (1993), faz uso da expressão “seres-humanos-com-mídias” e elenca as principais ideias relacionadas aos seres-humanos-com-mídias e aponta 12 aspectos:

- Novas tecnologias permitem a exploração de novos problemas matemáticos;
- Problemas atribuídos ao uso de lápis e papel “perdem o sentido” ao serem resolvidos por um *software*;
- A nova tecnologia não deve ser utilizada da mesma forma nas mesmas práticas condicionadas por outras tecnologias;
- É imprescindível a criação de novos problemas e atividades investigativas com novas tecnologias;
- A matemática baseada em lápis e papel e a baseada em *softwares* são qualitativamente diferentes;
- A moldagem é recíproca entre pensamento e tecnologia;
- A construção do conhecimento matemático dependente da tecnologia utilizada;
- As tecnologias são passíveis ao pensamento matemático;
- As tecnologias modificam a matemática;
- As tecnologias e o ser Humano são os atores principais nas operações cognitivas;
- Seres-humanos-com-mídias definem a formação do coletivo;
- Nas propostas de investigação o foco deve ser o pensar-com-tecnologias.

Esses 12 aspectos são fatos que corroboram o pensamento de Borba (2009, 2012), quando diz que “as tecnologias estão mudando a própria noção do que é ser humano” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018, p. 45-47). E devem ser levados em consideração quando se utiliza o construto seres-humanos-com-mídias numa pesquisa ou investigação. Porém, há um número crescente de tecnologias, que estão

em constante atualização, voltadas ao pensar-com-tecnologias. Além do GeoGebra, existem os *softwares* Wolfram Mathematica, Maxima, Scilab e outros com enfoque na álgebra e análise e, que em grande parte possuem licenças gratuitas e são voltados ao Ensino Superior, no entanto, nada impede que sejam utilizados na Educação Básica. No Quadro 2 a seguir, estão expostos os aspectos que caracterizam cada uma dessas fases.

QUADRO 1: Aspectos que caracterizam as quatro fases.

ETAPAS	TECNOLOGIAS	NATUREZA OU BASE TECNOLÓGICA	PERSPECTIVAS OU NOÇÕES TEÓRICAS	TERMINOLOGIA
Primeira fase (1985)	Computadores e calculadoras (simples ou científica).	LOGO (programação).	Construcionismo (micromundos).	Tecnologias informáticas (TI).
Segunda fase (1990)	Computadores Pessoais (PC) e calculadora gráfica.	Cabri Géomètre e Geometricks (Geometria dinâmica); Winplot, FUN, Mathematica (representação de funções); Maple (CAS) e jogos.	Experimentação, visualização e demonstração; zona de risco; conectividade; ciclo de aprendizagem construcionista; seres-humanos-com-mídias.	TI; software educacional; tecnologia educação.
Terceira fase (1999)	Computadores, laptops e internet.	Teleduc; e-mail; chat; fórum; Google.	EAD; interação online; comunidades de aprendizagem.	Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC).
Quarta fase (2004)	Computadores, laptops, celulares e internet.	GeoGebra; Wolfram Alpha; AVA; Moodle; Applets; YouTube; Facebook; Wikipedia; ICZ; Second live etc.	Performance matemática digital; Multimodalidade; interatividade; compartilhamentos online etc.	Tecnologias digitais (TD); Mídias digitais; tecnologias móveis.

Fonte: Adaptado de Borba; Scucuglia; Gadanidis (2018)

Também é importante ressaltar que as tecnologias da quarta fase estão sendo constantemente atualizadas ou criaram-se tecnologias baseadas nas suas versões anteriores. Cabe, então, descrever como está definida a álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental e descrever as particularidades das equações polinomiais do 2º grau.

1.3 O ENSINO DA ÁLGEBRA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Ao tratar de ensino e aprendizagem de álgebra, destacam-se estudos sobre o pensamento algébrico, linguagem algébrica, passagem da aritmética para a álgebra e rupturas cognitivas por conta dos conceitos abstratos. Muitos desses estudos são realizados nos anos finais do Ensino Fundamental. Almeida e Lima (2013, p. 92), ainda, ressaltam que,

Alguns estudos que buscam explorar particularmente esse aspecto têm encontrado importantes resultados. Pesquisas recentes indicam que muitos alunos parecem ter dificuldades para resolver certos tipos de problemas algébricos, particularmente quando envolvem uma tradução da linguagem escrita corrente para a linguagem da matemática. Do ponto de vista do contrato didático e da álgebra, poderíamos dizer que, tradicionalmente, o professor de matemática conduz sua aula de forma a valorizar mais a etapa operacional, resumindo o ensino da álgebra a procedimentos algébricos de resolução da equação.

Sabe-se que a aprendizagem da álgebra tem sido objeto de várias pesquisas. E, para professores/pesquisadores que trabalham com o ensino da álgebra verificam que os estudantes possuem dificuldades quanto ao seu aprendizado. Quando os estudantes iniciam os estudos dos conceitos algébricos mais abstratos, de forma mais intensa no 8º ano do Ensino Fundamental, eles se defrontam com entraves que causam dificuldades na aprendizagem desses conceitos (PAULOVICH, 1998, p. 44).

Muitas abordagens em torno da Álgebra são difundidas em sala de aula e pesquisas. Porém, algumas se destacam negativamente por levar a uma mecanização e memorização de fórmulas. Algumas abordagens acabam revelando a dificuldade dos estudantes em compreender operações elementares, o que acarreta dificuldades associadas à resolução de problemas e para uma aprendizagem significativa (OLIVEIRA; LAUDARES, 2015, p. 2).

Com o advento das mais variadas TD, as pesquisas realizadas nos anos finais do Ensino Fundamental com temáticas direcionadas ao ensinar e aprender álgebra, os objetos de conhecimento mais pesquisados são: equações do 1º grau, sistema de equações com duas incógnitas, expressões e equações algébricas, equações do 2º grau, funções, polinômios e construção e interpretação de gráficos.

Em pesquisa, realizada a partir da leitura de artigos e dissertações apresentadas de 2006 a 2015, Ferro (2018, p. 21-22) estabelece seis eixos de análise:

- Eixo I - A Álgebra relacionada a outros conceitos matemáticos;
- Eixo II - Concepções sobre linguagem algébrica e demonstração matemática;
- Eixo III - Operações algébricas e resolução de problemas;
- Eixo IV - Concepção de ensino/didática;
- Eixo V - O ensino de Álgebra nos livros didáticos;
- Eixo VI - Estudo de Álgebra utilizando recursos computacionais.

Pode-se constatar que a pesquisa está localizada nos eixos III e VI, porém, isso não significa a exclusão dos outros eixos que estão interrelacionados. Com relação aos recursos computacionais, as tecnologias mais utilizadas em estudos e pesquisas são: as calculadoras, o GeoGebra, planilhas eletrônicas e, recentemente, os jogos digitais, a realidade aumentada e outros.

Todos os seis eixos estão relacionados com competências e habilidades que devem ser desenvolvidas pelos estudantes. Portanto, na subseção a seguir são apresentadas as competências e habilidades em matemática e, principalmente para a unidade de álgebra para o 8º ano do Ensino Fundamental, preconizadas na BNCC. A subseção seguinte apresenta as habilidades que os estudantes devem desenvolver durante os estudos.

1.3.1 Particularidades das Equações Polinomiais do 2º Grau

Uma equação polinomial de grau n é denotada por $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, em que, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são coeficientes e x a raiz da equação polinomial sempre que $P(x) = 0$, onde $P(x)$ é um polinômio de grau n com coeficientes reais ($\mathbb{R}$). Por exemplo:

Dada a equação $3x - 12 = 0$; em que, $P(x) = 3x - 12$ e tem coeficientes $a_1 = 3$ e $a_0 = -12$, portanto, é uma equação polinomial de grau 1, ou do primeiro grau. A equação $x^2 - 3x + 7 = 0$; em que, $P(x) = x^2 - 3x + 7$ e tem coeficientes $a_2 = 1, a_1 = -3$ e $a_0 = 7$, portanto, é uma equação polinomial de grau 2, ou do segundo grau. E, a equação $x^3 - 2x^2 + 12x + 31 = 0$; em que, $P(x) = x^3 - 2x^2 + 12x + 31$ e tem coeficientes $a_3 = 1, a_2 = -2, a_1 = 12$ e $a_0 = 31$, logo, é uma equação polinomial de grau 3.

Nas equações, os valores (raízes) que tornam a equação polinomial verdadeira, no caso em que $P(x) = 0$, são representados pela letra x , ou seja, a letra x representa um ou mais números desconhecidos, dependendo do grau da equação, chamados incógnitas ou raízes. A pesquisa tem como objeto de estudo as equações polinomiais do 2º grau. Portanto, vale destacar que por definição: Toda equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é chamada equação do 2º grau, em que a, b e c são chamados coeficientes e x incógnita (DANTE, 2018, p. 89).

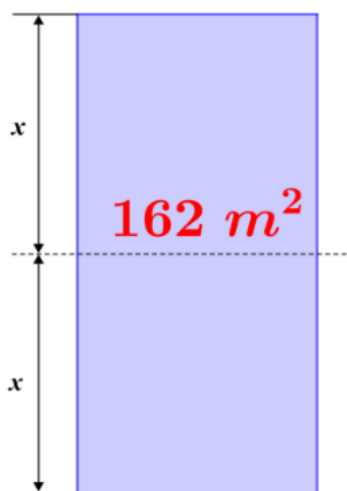
Os coeficientes b e c de um polinômio de grau n podem ser nulos (zero) e, neste caso o polinômio é denominado equação do segundo grau incompleta. Assim, por exemplo, a equação polinomial do 2º grau $3x^2 - 12 = 0$ é denominada incompleta, pois $b = 0$ e, a equação $x^2 - 4x = 0$ também é denominada equação incompleta, pois $c = 0$.

Como o objetivo é que os estudantes alcancem a habilidade em “equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$,” em que, nesse caso, b deve ser um número maior que 0 (zero) ou $b = 0$. Esse tipo de equação é conhecido também como equação incompleta do 2º grau e, pela definição $ax^2 + bx + c = 0$, a equação pode ser escrita como $ax^2 + b = 0$, com $a \neq 0$ e b um número real.

Para construir um modelo matemático de uma situação problema que permite o reconhecimento de uma equação polinomial do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, é importante que os estudantes tenham assimilado as definições.

Desse modo, dado o exemplo: **Um terreno em forma retangular será dividido em dois terrenos quadrados iguais. Se a área do terreno é de 162 m^2 , qual será a medida do lado de cada terreno quadrado?** É viável que possa ser resolvido rapidamente por meio de conceitos geométricos. Porém, utilizando uma incógnita, poderemos obter sua resolução algebricamente.

O estudante, para obter a solução, deve ter as habilidades básicas para resolver problemas como: ler e interpretar, construir ou utilizar um modelo matemático (fórmulas), resolver o modelo e por fim, interpretá-lo. A Figura 1 a seguir ilustra a situação.

FIGURA 1: Terreno em forma retangular.

Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Para resolvermos este problema é conveniente que se use as quatro etapas da resolução de problemas de Polya (1975): compreender o problema, construir o modelo matemático, resolver o modelo matemático e verificar o resultado. Assim, após a leitura e compreensão do problema será possível a construção de um modelo matemático. Em seguida, basta observar as seguintes particularidades do problema: A medida do lado de cada quadrado é x , a área de cada região quadrada é x^2 e a área do terreno retangular 162 m^2 .

Sendo assim, como dispomos de duas regiões com área da região quadrada igual a x^2 , então teremos como modelo matemático a igualdade: $2x^2 = 162 \text{ m}^2$. Agora, como resolver essa equação e encontrar sua solução? A solução é o valor da incógnita x , comumente chamada de raiz da equação e, no caso em que o grau é 2, a equação terá duas raízes.

No entanto, como resolver esta equação polinomial do 2º grau $2x^2 = 162$ e encontrar seus valores numéricos, as raízes. Assim, um número real x será uma raiz para a equação polinomial do tipo $ax^2 = b$ assim, com o modelo matemático estabelecido, basta solucionar o problema, logo:

$$2 \cdot x^2 = 162 \Rightarrow x^2 = \frac{162}{2} \Rightarrow x^2 = 81$$

Portanto, há duas raízes, podendo ser $x = 9$ ou $x = -9$. Contudo, a medida do lado de cada terreno será de 9 metros, pois se trata de uma unidade comprimento, em que, medida será sempre positiva e, pode-se verificar que $9^2 = 81$.

Ao generalizar o modelo matemático da equação incompleta $ax^2 = b$ para encontrar as raízes, teremos que:

$$ax^2 = b \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad x = \pm \sqrt{\frac{b}{a}} \quad (1)$$

O que resultará nas soluções com valores reais: $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$ ou $x = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ sempre que a fração $\frac{b}{a}$ seja positivo.

Vejamos, agora, como encontrar as raízes da equação do 2º grau incompleta $4x^2 - 100 = 0$, seguindo os passos da generalização em (1). Logo:

$$4x^2 - 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{100}{4}$$

Portanto, $x = \sqrt{\frac{100}{4}} = \frac{10}{2} = 5$ ou $x = -\sqrt{\frac{100}{4}} = -\frac{10}{2} = -5$. Em que, utilizamos a propriedade da radiciação: $\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$. E, também, como podemos observar, a fração $\frac{100}{4}$ resulta em 25, dessa forma, poderíamos resolver a equação, mais rapidamente, da seguinte forma: $x^2 = 25$, logo $x = \pm\sqrt{25}$, obtendo, assim, as raízes $x = 5$ ou $x = -5$ da equação $4x^2 - 100 = 0$.

Neste exemplo, podemos perceber que não há necessidade de aplicarmos as quatro etapas para resolução de problemas de Polya (1975), porém, temos uma quantidade considerável de conceitos e definições do cálculo algébrico aplicados.

Para o caso da equação do tipo $ax^2 = 0$, com $a \neq 0$, a solução é trivial, ou seja, a equação tem sempre duas raízes reais iguais a zero. Os passos para resolução da equação anterior também valem para a equação do tipo $ax^2 = 0$. Basta, então, percorrer sobre o porquê aparecerem duas raízes na solução da equação, em que, sendo $b \neq 0$ para a equação do tipo $ax^2 = b$, obtém-se dois valores iguais com sinais opostos. E, também, para a não existência de raízes reais quando $x = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$.

Portanto, ficam assim definidas algumas particularidades da equação polinomial do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, sem entrar em outros assuntos que são pertinentes como o módulo (valor absoluto) e racionalização. Porém, algumas proposições e cálculos serão discutidos nas tarefas propostas para os estudantes, apresentadas na subseção a seguir, que, posteriormente, serão incorporadas à Sequência Didática (SD) do Produto Educacional.

Recursos tecnológicos voltados ao ensino de matemática como o GeoGebra é um exemplo de tecnologia, cuja BNCC (BRASIL, 2018) preconiza. Na seção seguinte é apresentado a Base Nacional Comum Curricular composta por competências e habilidades voltadas para a matemática.

1.4 COMPETÊNCIAS E HABILIDADES EM MATEMÁTICA PRECONIZADAS PELA BNCC

As competências e habilidades em matemática preconizadas na BNCC (BRASIL, 2018) e, suas mudanças e implicações e, principalmente, para a álgebra para o 8º ano fazem parte dos objetivos específicos desta pesquisa. Também buscou-se apresentar a habilidade, na qual, deseja-se que os estudantes desenvolvam.

A BNCC apresenta definições e conceitos quanto às habilidades e competências. Por se tratar de um documento que tem caráter normativo, a BNCC define-se por um conjunto organizado e progressivo das aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver. O documento aplica-se exclusivamente à educação escolar e “está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN)” (BRASIL, 2018, p. 7).

As aprendizagens essenciais definidas na BNCC devem assegurar aos estudantes o desenvolvimento de dez competências gerais, oportunizando aos estudantes seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento. Na BNCC (BRASIL, 2018, p. 8), define-se competência como “a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho”. Além disso, ainda, aponta que:

É imprescindível destacar que as competências gerais da BNCC, [...] inter-relacionam-se e desdobram-se no tratamento didático proposto para as três etapas da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), articulando-se na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores, nos termos da LDB. (BRASIL, 2018, p. 8-9)

A Matemática está organizada na BNCC (BRASIL, 2018) do Ensino Fundamental pelas unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e, Probabilidade e Estatística. Nas quais, cada unidade temática contém objetos de conhecimento e habilidades que deverão ser desenvolvidas nos estudantes em todo o Ensino Fundamental. A BNCC também traz algumas novidades como as habilidades relacionadas à tecnologia, robótica e programação.

A Matemática no Ensino Fundamental compreende as unidades temáticas da sua área para, então, garantir que os estudantes relacionem observações e as representem por meio de tabelas, gráficos, figuras e esquemas e, associem tais representações a uma atividade matemática. Para isso, a BNCC (BRASIL, 2018) coloca que o Ensino Fundamental tem o compromisso com o letramento matemático e que os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem são formas privilegiadas da atividade matemática.

A BNCC (BRASIL, 2018, p. 264) aponta que esses processos matemáticos “[...] [são] processos de aprendizagem [que] são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional.”

Por conseguinte, são apresentadas oito competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental preconizadas pela BNCC (2018, p. 267):

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo

a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes. **5.** Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados. **6.** Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados). **7.** Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza. **8.** Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Dentre estas competências destacam-se as competências 3, que traz as relações entre geometria e álgebra; 5, pois, trata-se da competência que dá validade quanto à inserção do GeoGebra nesta pesquisa. E, a competência 6 que faz referência a situações problema.

Contudo, faz-se necessário desenvolver todas as oito competências. Ou seja, a BNCC (BRASIL, 2018) torna possível a introdução de novas metodologias como a Problem Based Learning, aprendizagem baseada em problemas, o Science, Technology, Engineering, Arts e Mathematics (STEAM), baseada em aulas que integram ciências, tecnologia, engenharia, arte e matemática e dentre outras metodologias utilizadas para desenvolvimento de habilidades.

Cada uma das unidades temáticas é composta por “objetos de conhecimentos” e suas respectivas habilidades. Por exemplo: “Valor numérico de expressões algébricas” é um objeto de conhecimento da unidade temática álgebra. Com esse objeto de conhecimento espera-se que os estudantes desenvolvam a habilidade EF08MA06¹²: “Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações” como podemos ver no quadro a seguir. (BRASIL, 2018, p. 312-313).

12 Código alfanumérico que identifica a habilidade. No caso do código EF08MA09 temos: **EF** indica a etapa Ensino Fundamental; **08** indica o ano escolar: 8º ano; **MA** indica a componente curricular matemática e, **09** indica a sequência das habilidades constituídas para o ano escolar em referência.

QUADRO 2: Descrição da unidade temática de álgebra para o 8º ano

UNIDADE TEMÁTICA	OBJETOS DE CONHECIMENTO	HABILIDADES
Álgebra	Valor numérico de expressões algébricas	(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
	Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano	(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
	Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano	(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
	Equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$	(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
	Sequências recursivas e não recursivas	(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.
		(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
	Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.
		(EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2018)

Considerando a unidade temática álgebra para o 8º ano como mostrado no Quadro 2, temos que, entre todo o Ensino Fundamental, a BNCC (BRASIL, 2018) preconiza oito habilidades, ou seja, é evidente o predomínio da álgebra no 8º ano mesmo na unidade de geometria, pois, a partir do 8º ano tem-se uma intensificação na abstração matemática em álgebra o que é essencial para os anos seguintes.

Como cada objeto de conhecimento é composto de habilidades a serem desenvolvidas pelos estudantes, a BNCC traz verbos que expressam uma ação para gerar uma mudança (desenvolver habilidades). São os verbos: Resolver, Elaborar, Associar, Identificar e Construir. Esses verbos de ação, também, podem ser tratados de verbos que direcionam os estudantes a uma atividade mental. O que corrobora com um de seus objetivos para a matemática, em que a BNCC (BRASIL, 2018, p. 9) expressa:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

Diante do que foi apresentado, sentiu-se a necessidade de apontar a definição de habilidade e competência. Esses dois conceitos encontram-se em diversos documentos como nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNEM) e Orientações Curriculares Nacionais para Ensino Médio (OCNEM) e nos sistemas de avaliação nacionais, o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), Prova Brasil (BRASIL, 2011), Exame Nacional de Ensino Médio (ENEM) e o Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (ENCCEJA). Agora, temos a BNCC (BRASIL, 2017) que, também, traz esses conceitos.

Assim, com base nas habilidades e competências preconizadas pela BNCC, foram delineadas quais as competências específicas e as habilidades matemáticas a serem alcançadas com o GeoGebra no 8º ano. Além disso, a BNCC (BRASIL, 2017) também apresenta competências específicas de matemática para o Ensino Fundamental, sendo as mais relevantes para a pesquisa, as competências específicas 5 e 6 na utilização de processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis e situações problema.

Ao refletir sobre uma tecnologia que auxilie no desenvolvimento das habilidades em álgebra, o GeoGebra se destaca por ser reconhecido entre educadores matemáticos pelo seu carácter dinâmico e que abrange, o ensinar e o aprender matemática nas interfaces que permitem cálculos e apresentações gráficas, construções geométricas etc.

Na seção seguinte são apresentadas algumas abordagens sobre o ensino da álgebra no Ensino Fundamental Anos Finais em livros didáticos do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) 2020.

1.4.1 Abordagem da habilidade em Livros didáticos do PNLD-2020 para o 8º ano

Os livros didáticos são ferramentas essenciais de auxílio aos professores e, no ensino da Matemática, o livro torna-se fundamental para a aprendizagem de termos técnicos, definições, símbolos e algoritmos para cálculos (EDOCENTE, 2020).

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017, p. 266), é necessário priorizar o letramento matemático, responsável por assegurar aos alunos a capacidade de “reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo”. Para que isso ocorra é necessário que os professores de Matemática utilizem o livro didático da melhor forma possível em sala de aula estimulando as noções investigativas nos estudantes. (EDOCENTE, 2020)

O livro didático é um instrumento que auxilia os professores na elaboração de bons planos de aula. Ao adotar o livro, o professor orienta e faz com que o aluno tenha contato direto com os conteúdos, em que o aluno poderá buscar construir seu próprio conhecimento.

Dentre as mais variadas bibliografias que o professor poderá utilizar em suas aulas, recomenda-se que o professor utilize livros do PNLD. Os livros sugeridos pelo PNLD seguem o currículo nacional vigente.

No recente PNLD-2020, alguns manuais do professor foram elencados para serem utilizados em escolas de todo o Brasil. E, dentre os manuais para o 8º ano, que seguem os preceitos da BNCC, destacam-se: “Matemática essencial” de Patrícia Moreno Pataro e Rodrigo Balestri, “Teláris matemática” de Luiz Roberto Dante e “Trilhas da matemática” de Fausto Arnaud Sampaio, todos edições do ano de 2018.

Os manuais “A Conquista da Matemática” de José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci e “Matemática Realidade & Tecnologia” de Joamir Roberto de Souza, também são edições de 2018 que seguem o novo currículo.

No manual “Matemática Essencial” são dedicadas três páginas para introdução e exercícios sobre a habilidade EF08MA09 no capítulo que trata de Equações, sistemas de equações e inequações e, mais uma na seção Explorando tecnologias mostrando como resolver uma equação na janela de álgebra do GeoGebra. A Figura 2 a seguir mostra a habilidade abordada no manual “Matemática Essencial.”

FIGURA 2: Habilidade EF08MA09 no Manual Matemática Essencial.

Equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$

Nas seções anteriores estudamos as equações do 1º grau, ou seja, equações cujo expoente das incógnitas é 1. Nesta seção, vamos estudar um tipo de equação cujo expoente da incógnita é 2.

Considere um terreno com formato retangular que será dividido em dois terrenos iguais com formato de quadrado. Se a medida da área do terreno retangular é 288m^2 , qual será a medida do comprimento do lado dos terrenos com formato de quadrado?

Para resolver esse problema, chamamos de x a medida do comprimento do lado dos terrenos com formato de quadrado.

Assim, temos que a medida da área de cada terreno com formato de quadrado é x^2 e a medida da área do terreno retangular é $2x^2 = 288$.

Dizemos que $2x^2 = 288$ é uma equação do 2º grau, pois a incógnita tem expoente 2. Para resolvê-la, inicialmente isolamos x^2 em um dos membros.

$$\frac{2x^2}{2} = \frac{288}{2}$$

$$x^2 = 144$$

Temos que há dois números cujo quadrado é 144, isto é:

$$x = 12 \text{ ou } x = -12$$

Nessa caso, x corresponde à medida do comprimento do lado de um terreno, e como uma medida de comprimento não pode ser negativa, descartamos o valor negativo -12 .

Portanto, cada um dos terrenos com formato de quadrado tem comprimento do lado medindo 12 m.

As equações que podem ser escritas na forma $ax^2 + b = 0$, em que a e b são números reais, com $a \neq 0$, são chamadas equações do 2º grau incompletas. Exemplos:

$$x^2 - 3 = 0 \quad x - 3x^2 = -27 \quad 2,5x^2 = 0$$

Exercício

1. No tópico Equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$ são estudadas apenas as equações do 2º grau incompletas desse tipo. As equações completas do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ e os outros tipos de equações incompletas do 2º grau serão estudados mais adiante.

2. Se julgar conveniente, peça aos alunos que consultem o capítulo 2 desse volume e retomem com eles o conceito de raiz quadrada, a fim de auxiliá-los na compreensão do conteúdo abordado nesse tópico.

Resolução

Inicialmente, oriente os alunos a digitarem apenas a janela de Álgebra sendo exibida. Para isso, veja o comentário da página 286, nas orientações ao professor.

No passo 1, oriente os alunos a iniciarem o trabalho. Caso eles tenham dificuldade, para isso, em geral, deve-se pressionar a tecla **Alt**, e, sem soltá-la, pressionar a tecla em que aparece o símbolo x^2 .

Em vez de digitar a expressão $2x^2 = 288$ na Janela de Álgebra, como foi feito no passo 1, é possível utilizar os botões que aparecem na parte inferior da janela, após clicar no campo **Entrada**.

Para iniciar a equação $2x^2 = 288$, como no exemplo, clique nos botões:

2 → x → = → 288 → =

Equações do 2º grau do tipo $ax^2 = b$

A seguir, veremos como resolver equações do tipo $ax^2 = b$ no GeoGebra. Para isso, vamos utilizar apenas a Janela de Álgebra, sem considerar a Janela de Visualização.

1. Para resolver a equação $2x^2 = 288$, por exemplo, digite $2x^2 = 288$ no campo **Entrada**.

2. No GeoGebra, x^2 é representado por x^2 . Ao digitar na expressão, você deverá pressionar a tecla com a seta para a direita do teclado após o número 2.

3. Clique no botão **Resolver**, como mostra a imagem do passo anterior. Como resultado, em duas soluções de equação, $x = \sqrt{144}$ e $x = -\sqrt{144}$ aparecerão na lista de bases.

4. Clique no botão com o símbolo de aproximação ($\approx$), que aparece na imagem do passo anterior. Fazendo isso, aparecerá uma aproximação das soluções da equação resolvida, quando $x = 12$ e $x = -12$.

5. A aproximação, em geral, por padrão, ocorre até a data dos centésimos, porém pode ser alterada no campo **Configurações**.

Respostas nas variáveis das equações

1. Escreva o enunciado de um problema que pode ser resolvido por meio da equação resolvida acima.

2. Utilize o GeoGebra para resolver e determinar as soluções exatas das equações a seguir. Depois, indique os valores aproximados das soluções no item a.

a) $5x^2 = 25$ b) $4x^2 = 16$ c) $x^2 = 81$

Respostas

1. Resposta pessoal. Possível resposta elaborada a partir da medida da área de um quadrado Q que é 6. Qual a medida do comprimento do lado desse quadrado?

2. a) $x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$ valores aproximados $-2,24$ e $2,24$
 b) $x = -2$ ou $x = 2$
 c) $x = -9$ ou $x = 9$

Fonte: Pataro; Balestri (2018, p. 133 e 286)

Pataro e Balestri (2018, p. 133) trazem uma introdução da equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$ e na página 286 consta a aplicação do GeoGebra como sugestão ao professor. Ao utilizar o GeoGebra, o manual traz apenas os comandos “Resolver” e “ResolverNumericamente” na janela de álgebra. Porém, os autores não inserem termos e conceitos matemáticos importantes para que os alunos possam fazer uma leitura crítica, com exceção apenas em que o coeficiente a deva ser diferente de 0 ($a \neq 0$).

O manual “Teláris matemática” diferentemente do manual “Matemática Essencial” traz três páginas de introdução a equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$ e o

software Mathway como recurso tecnológico no capítulo que trata de Expressões algébricas, equações e proporcionalidade. A Figura 3 a seguir mostra a habilidade abordada no manual “Teláris Matemática.”

FIGURA 3: Habilidade EF08MA09 no Manual Teláris Matemática.

Equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, com $a \neq 0$

Toda equação com 1 incógnita que pode ser escrita na forma $ax^2 = b$, com $a \neq 0$, é chamada de equação do 2º grau com 1 incógnita.

Teremos que a e b são os coeficientes da equação e x é a incógnita. Note que a é o coeficiente do termo de grau zero.

Veja alguns exemplos:

- $x^2 = 5x + 6 \Rightarrow$ coeficientes: $a = 1$; $b = 25$; $c = 6$.
- $x^2 = 49 \Rightarrow$ coeficientes: $a = 1$; $b = 0$; $c = 249$.
- $2x^2 = 4x \Rightarrow$ coeficientes: $a = 2$; $b = 24$; $c = 0$.
- $5x^2 = 0 \Rightarrow$ coeficientes: $a = 5$; $b = 0$; $c = 0$.

Quando a não é 1, temos $a \neq 1$ e $b \neq 0$. Nesse caso a equação do 2º grau é completa. Quando a não é 1 e b não é 0, temos que a equação do 2º grau é incompleta. Assim, se a não é 1 e b não é 0, a equação é completa e se a não é 1 e b é 0, a equação é incompleta.

Raízes ou soluções de uma equação do 2º grau

Análise do valor de x em uma equação do 2º grau, independentemente do grau, é um valor do conjunto universo considerado que, substituído à incógnita, torna a sentença matemática verdadeira.

Por exemplo, no conjunto dos números reais, as raízes da equação do 2º grau $x^2 - 5x + 4 = 0$ são 4 e 1. Indicamos essas raízes por: $x = 4$ e $x = 1$. Observe como as sentenças são verdadeiras para esses números.

- Substituindo x por 4, obtemos:
 $x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow 4^2 - 5 \cdot 4 + 4 = 0 \Rightarrow 16 - 20 + 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0$
- Substituindo x por 1, obtemos:
 $x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow 1^2 - 5 \cdot 1 + 4 = 0 \Rightarrow 1 - 5 + 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

Resolução de equações do 2º grau

Neste capítulo, você aprenderá a resolver equações incompletas do 2º grau em que $b = 0$, ou seja, equações que podem ser escritas na forma $ax^2 = c$, com $a \neq 0$. Veja um exemplo:

Joana estava pensando no seguinte problema: Se o triplo do quadrado de um número é igual a 147, então qual é esse número?

Representando esse número por x , temos a equação $3x^2 = 147$. Então:

$$3x^2 = 147 \Rightarrow x^2 = \frac{147}{3} \Rightarrow x^2 = 49$$

Teremos que x é um número que, elevado ao quadrado, é igual a 49. Logo, $x = 7$ ou $x = -7$, pois $7^2 = 49$ e $(-7)^2 = 49$.

2 Equações

Coloque na barra de busca a equação $ax^2 = b$, com $a \neq 0$. O resultado será: "Qual é o grau dessa equação?" O grau da equação é 2. Se $a \neq 0$, a equação é do 2º grau. Se $a = 0$, a equação é do 1º grau. Se $a = 0$ e $b = 0$, a equação é do 0º grau.

Destaque que, quando todos os coeficientes são diferentes de zero, temos uma equação completa do 2º grau, enquanto que, quando um ou mais coeficientes são iguais a zero, temos uma equação incompleta do 2º grau. Então, quando os coeficientes de uma equação do 2º grau são todos diferentes de zero, temos uma equação completa do 2º grau. Quando um ou mais coeficientes são iguais a zero, temos uma equação incompleta do 2º grau.

Neste momento, apresentamos o Mathway para a resolução de equações do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, com $a \neq 0$. Nesse momento, apresentamos o Mathway para a resolução de equações do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, com $a \neq 0$. Nesse momento, apresentamos o Mathway para a resolução de equações do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, com $a \neq 0$.

O Mathway

O Mathway é uma ferramenta on-line de resolução de problemas matemáticos que pode ser utilizada em diversos conteúdos de Álgebra, Geometria, Estatística e outras áreas de estudo de Matemática, e em todos os níveis de ensino.

Neste momento, apresentamos o Mathway para a resolução de equações do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, com $a \neq 0$. Nesse momento, apresentamos o Mathway para a resolução de equações do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, com $a \neq 0$.

Resolução de equação do 2º grau

Para resolver uma equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$, com $a \neq 0$, siga os passos a seguir:

1º passo: Digite na barra de busca a equação $ax^2 = b$, com $a \neq 0$. O resultado será: "Qual é o grau dessa equação?" O grau da equação é 2. Se $a \neq 0$, a equação é do 2º grau. Se $a = 0$, a equação é do 1º grau. Se $a = 0$ e $b = 0$, a equação é do 0º grau.

2º passo: Uma janela vai aparecer para você escolher o que quer que o programa faça. Escolha "Resolva usando a propriedade de raiz quadrada".

3º passo: Observe o resultado da resolução da equação. No caso, as raízes ou soluções da equação $2x^2 = 8$ são $x = 2$ e $x = -2$. Você também pode observar a resolução detalhada clicando em "Toque para ver os passos...".

Questões

1) Resolva as equações incompletas do 2º grau usando o Mathway:
a) $3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$. b) $2x^2 = 50 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$ ou $x = -5$. c) $-3x^2 = -108 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$ ou $x = -6$.

2) No cotidiano, represente cada situação usando uma equação e resolva-a. Depois, confira o resultado usando o Mathway e registre a resposta.
a) Carlos e Maria estão brincando de adivinhar números. Carlos pensou em um número natural, o elevou ao quadrado, depois multiplicou por 3 e depois à Maria o que resultou foi 240. Encontre o número que Carlos pensou! b) Adividido João, qual é o número, é igual ao triplo do quadrado da idade do Rômulo. Qual é a idade do Rômulo? c) $x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$ ou $x = -7$. d) $2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$.

Fonte: Dante (2018, p. 89 e 91)

Em “Teláris Matemática”, Dante (2018, p. 89) insere termos e conceitos matemáticos sobre a equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$. Os passos para resolver a equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$ no Mathway são semelhantes ao do GeoGebra, como mostrado na figura 3.

Segundo Dante (2018, p. 91), “O Mathway é uma ferramenta on-line de resolução de problemas matemáticos que pode ser utilizada em diversos conteúdos de Álgebra, Geometria, Estatística e outras áreas de estudo de Matemática, e em todos os níveis de ensino.” Contudo, o Mathway funciona como uma calculadora mostrando apenas a solução e pode ser utilizado on-line e, também em aplicativo para celular e suas janelas não interagem de forma dinâmica.

O manual “Trilhas da Matemática” traz apenas duas páginas de introdução a equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$ de forma resumida no capítulo que trata de equações. Entretanto, ao tratar da habilidade com tecnologias digitais, o Sampaio (2018, p. 228) utiliza a planilha LibreOffice Calc no capítulo que trata de Perímetros, áreas, volumes e capacidade, em que dedica duas páginas para mostrar como

calcular “as medidas aproximadas de um terreno tal que a medida de um lado seja o dobro da medida do outro e a medida de sua área seja 15 m^2 .” A Figura 4 a seguir mostra a habilidade abordada no manual “Trilhas da Matemática.”

FIGURA 4: Habilidade EF08MA09 no Manual Trilhas da Matemática.

Exercício 12: Qual dos pares ordenados a seguir é solução da equação $2x - y + 3 = 0$? (a, -4)

Exercício 13: Lúcio foi ao mercado comprar açúcar e havia dois tipos de açúcar à venda, refinado e cristal, ao preço de R\$ 2,00 e R\$ 3,00 por pacote, respectivamente. Sabendo que ele gastou R\$ 28,00, quantos pacotes de cada tipo de açúcar ele comprou? *Responda no final do livro.*

Exercício 14: Obtenha duas soluções para cada equação do 2º grau com duas incógnitas. *Responda no final do livro.*

a) $-2x - y = 24$ b) $-x + y = 1$ c) $2x - 2y = 1$ d) $-x + y = 1$

e) $3x + 4y = 9$ f) $-x + y = 1$ g) $2x - 2y = 1$ h) $-x + y = 1$

Exercício 15: Cado tem R\$ 60,00 em cédulas de R\$ 5,00 e R\$ 2,00 em um total de 15 cédulas. Quantas cédulas de cada tipo ele tem? *Responda no final do livro.*

Exercício 16: Em cada caso, construa, em papel quadriculado, um plano cartesiano e represente graficamente o conjunto solução de cada equação do 1º grau com duas incógnitas. *Responda no final do livro.*

a) $2x + y = 1$ b) $-x - y = 3 = 0$

Equação do 2º grau com uma incógnita

Lúcio alugou quatro espaços idênticos de formato quadrado para expor seus produtos em uma festa de aniversário, conforme o esquema ao lado. A área total do espaço alugado mede 196 m^2 . Qual é a medida do comprimento do lado de cada um desses quadrados?

Como são 4 quadrados e a área de cada quadrado mede x^2 , podemos escrever a seguinte equação:

$$4x^2 = 196$$

Essa sentença matemática é um exemplo de **equação do 2º grau com uma incógnita**.

Equação do 2º grau na incógnita x é uma sentença matemática que pode ser escrita na forma $ax^2 = b$, sendo a e b números racionais, com $a \neq 0$.

Vejamos agora como podemos resolver a equação $4x^2 = 196$. Primeiro, dividimos ambos os membros da equação por 4:

$$\frac{4x^2}{4} = \frac{196}{4}$$

$$x^2 = 49$$

Como a medida da área de um quadrado é dada pelo quadrado da medida do comprimento do lado, precisamos saber qual é o número positivo que elevado ao quadrado resulta em 49. Esse número é $\sqrt{49}$, que é igual a 7, logo:

$$x = 7$$

Portanto, a medida do comprimento do lado de cada quadrado é 7 metros.

Para verificar se a solução obtida é raiz da equação, podemos substituir o valor de x na equação $4x^2 = 196$:

$$4 \cdot (7)^2 = 196$$

$$4 \cdot 49 = 196$$

$$196 = 196 \text{ (sentença verdadeira)}$$

Habilidade da BNCC (EF08MA09) Resolver e interpretar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

Comentamos ao longo que a solução de equações do tipo $ax^2 = b$ é muito simples, se quisermos e podemos aplicá-las em situações de equações de 2º grau do tipo $ax^2 = b$, em que basta que determinemos a raiz que elevado ao quadrado resulta em b .

Exercício 17: Lúcio decidiu que a área de um terreno quadrado que ele queria comprar deveria ser de 15 m^2 . Ele decidiu que a medida de um lado deveria ser o dobro da medida do outro. Qual a medida do lado desse terreno?

Para resolver esse problema, vamos considerar o lado do terreno como x e o outro lado como $2x$. Assim, a área do terreno será dada por:

$$A = x \cdot 2x = 2x^2$$

Como a área do terreno é 15 m^2 , podemos escrever a seguinte equação:

$$2x^2 = 15$$

Dividindo ambos os membros da equação por 2, temos:

$$x^2 = \frac{15}{2}$$

Para encontrar a medida do lado, precisamos encontrar o número positivo que elevado ao quadrado resulta em $\frac{15}{2}$. Esse número é $\sqrt{\frac{15}{2}}$, que é aproximadamente igual a 2,74 m.

Portanto, a medida do lado do terreno é aproximadamente 2,74 m.

Exercício 18: Lúcio decidiu que a área de um terreno quadrado que ele queria comprar deveria ser de 15 m^2 . Ele decidiu que a medida de um lado deveria ser o dobro da medida do outro. Qual a medida do lado desse terreno?

Para resolver esse problema, vamos considerar o lado do terreno como x e o outro lado como $2x$. Assim, a área do terreno será dada por:

$$A = x \cdot 2x = 2x^2$$

Como a área do terreno é 15 m^2 , podemos escrever a seguinte equação:

$$2x^2 = 15$$

Dividindo ambos os membros da equação por 2, temos:

$$x^2 = \frac{15}{2}$$

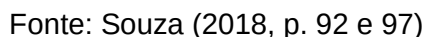
Para encontrar a medida do lado, precisamos encontrar o número positivo que elevado ao quadrado resulta em $\frac{15}{2}$. Esse número é $\sqrt{\frac{15}{2}}$, que é aproximadamente igual a 2,74 m.

Portanto, a medida do lado do terreno é aproximadamente 2,74 m.

Fonte: Sampaio (2018, p. 133 e 229)

Por ser um *software* de licença livre, o Calc é bastante utilizado por professores de matemática. O interessante neste manual de Sampaio (2018, p. 229), é que ao utilizar o Calc como tecnologia digital para resolver a equação do 2º grau, o estudante desenvolve a habilidade de encontrar a raiz quadrada por aproximação.

O manual “Matemática Realidade & Tecnologia”, Souza (2018, p. 92-94) traz no capítulo de Equação, Sistema de equações e Inequação, a definição do objeto de conhecimento bem mais resumido que os manuais apresentados anteriormente sem termos técnicos e com apenas sete exercícios. A Figura 5 a seguir mostra a habilidade abordada no manual “Matemática Realidade & Tecnologia.”



No capítulo de equações do manual “A Conquista da Matemática” de Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 161-162) apresenta resumidamente, o objeto de conhecimento equação do 2º grau acompanhado de três exercícios. A Figura 6 a seguir mostra a habilidade abordada no manual “A Conquista da Matemática”. Este é o único dos manuais apresentados que não sugere alguma tecnologia digital para auxiliar os estudantes na resolução de uma equação do 2º grau.

FIGURA 6: Habilidade EF08MA09 no Manual A Conquista da Matemática.

CAPÍTULO 7 **EQUAÇÃO DO 2º GRAU**

Você já sabe que resolver uma equação significa determinar os possíveis valores que satisfazem a equação (o conjunto solução) em um conjunto universo dado. Na resolução das equações do 2º grau, usaremos a fatoração e esta propriedade importante dos números reais:

• Sendo x e y dois números reais quaisquer e $x^2 = y$, então $x = \sqrt{y}$ ou $x = -\sqrt{y}$.

Resolvendo equações da forma $ax^2 + b = 0$

Acompanhe as situações a seguir:

- Qual é a solução da equação $x^2 - 9 = 0$, no conjunto $\mathbb{R}$?
 $x^2 - 9 = 0 \rightarrow$ usamos o princípio aditivo
 $x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$
 Logo, os números -3 e 3 são as raízes da equação. Assim, $S = \{-3, 3\}$.
- Resolver a equação $16x^2 - 1 = 0$ no conjunto $\mathbb{R}$.
 $16x^2 - 1 = 0 \rightarrow$ usamos o princípio aditivo
 $x^2 = \frac{1}{16} \rightarrow$ usamos o princípio multiplicativo
 $x = \pm\sqrt{\frac{1}{16}} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{4}$
 Logo, os números $-\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$ são as raízes da equação. Assim, $S = \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\}$.
- Determinar os valores reais de x para que se tenha $3x^2 - 60 = 0$.
 Como todos os termos da equação são divisíveis por 3, podemos dividir cada termo da equação por 3, para depois determinar os valores de x .
 $3x^2 - 60 = 0$
 $\frac{3x^2}{3} - \frac{60}{3} = \frac{0}{3} \Rightarrow x^2 - 20 = 0$
 $x^2 - 20 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{20}$
 Como 20 não apresenta raiz quadrada exata, os números $\sqrt{20}$ e $-\sqrt{20}$ são as raízes da equação. Assim, $S = \{-\sqrt{20}, \sqrt{20}\}$.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

Equação do 2º grau
 Esse é o primeiro contato dos alunos com as equações do 2º grau. Aqui serão apresentadas apenas as equações do tipo $ax^2 + b = 0$. Caso os alunos demonstrem interesse, apresentar, apenas a título de curiosidade, os demais tipos de equações do 2º grau e comentar que essas equações serão estudadas de maneira mais aprofundada no ano seguinte e no Ensino Médio. Verificar se os alunos reconhecem que as estratégias utilizadas para resolver esse tipo de equação do 2º grau são similares às estratégias utilizadas para a resolução de equações do 1º grau.

Atividades
 As atividades têm como objetivo levar os alunos a determinar o conjunto solução de equações do 2º grau do tipo $ax^2 + b = 0$. Nas atividades 2 e 3, verificar se os alunos percebem que precisam realizar algumas manipulações algébricas para que a equação chegue à forma $ax^2 + b = 0$ e possam resolvê-la com as estratégias estudadas. Por ser um assunto novo para os alunos, verificar se, durante a execução das atividades, alguns princípios estratégicos diferentes da apresentada. Caso isso aconteça, solicitar que o aluno explique sua estratégia para que o resto da turma possa validá-la. Desse modo, a construção do conhecimento é feita de maneira coletiva, sempre respeitando a opinião e as ideias dos colegas.

ATIVIDADES

1. Determine o conjunto solução de cada uma das seguintes equações do 2º grau, no conjunto $\mathbb{R}$:

- $x^2 - 1 = 0$ $\rightarrow$ $S = \{-1, 1\}$
- $x^2 - 16 = 0$ $\rightarrow$ $S = \{-4, 4\}$
- $x^2 - 64 = 0$ $\rightarrow$ $S = \{-8, 8\}$
- $x^2 - 16 = 0$ $\rightarrow$ $S = \{-4, 4\}$
- $3x^2 = 25$ $\rightarrow$ $S = \{-\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}\}$
- $x^2 - 20 = 0$ $\rightarrow$ $S = \{-\sqrt{20}, \sqrt{20}\}$

2. Qual é o conjunto solução de cada uma das seguintes equações do 2º grau, sendo $U = \mathbb{R}$?

- $x + 50x - 61 = 51 - x$ $\rightarrow$ $S = \{-5, 1\}$
- $20x + 11 - 10x + 52 = 2(12 - x)$ $\rightarrow$ $S = \{-6, 6\}$

3. Calcule o conjunto solução de cada equação:

- $3x - \frac{1}{3x} = 0$, $x \neq 0$, $U = \mathbb{R}$ $\rightarrow$ $S = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$
- $\frac{x^2}{2} - \frac{5}{2} = -1$, $U = \mathbb{R}$ $\rightarrow$ $S = \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$

4. Determine a solução da equação $x^2 + 4 = 0$ no conjunto $\mathbb{R}$.
 $x^2 + 4 = 0$
 $x = \pm\sqrt{-4}$
 Como $\sqrt{-4}$ não existe no conjunto $\mathbb{R}$, não temos valores reais para x . Logo, a equação não tem raízes reais. Assim, $S = \emptyset$.

5. Resolva, no conjunto $\mathbb{R}$, a equação $(2y + 1)^2 - 8 + 2(2y + 1)$.
 Inicialmente, vamos multiplicar os polinômios e deixar a equação na forma $ax^2 + b = 0$ para, depois, resolvê-la:
 $(2y + 1)^2 - 8 + 2(2y + 1)$
 $(2y + 1)(2y + 1) - 8 + 2(2y + 1)$
 $4y^2 + 2y + 1 - 8 + 4y + 2$
 $4y^2 + 4y - 5 = 0$
 $4y^2 + 4y - 5 = 0 \rightarrow$ usamos o princípio aditivo
 $4y^2 - 9 = 0 \rightarrow$ forma $ax^2 + b = 0$
 $4y^2 - 9 = 0 \rightarrow$ usamos o princípio aditivo
 $y^2 = \frac{9}{4} \rightarrow$ usamos o princípio multiplicativo
 $y = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$
 $y = \pm\frac{3}{2}$
 Logo, os números $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$ são as raízes da equação. Assim, $S = \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$.

Fonte: Giovanni Júnior e Castrucci (2018, p. 161-162)

Os manuais e livros didáticos de Pataro e Balestri (2018), Dante (2018), Sampaio (2018), Giovanni Júnior e Castrucci (2018) e de Souza (2018) são coleções das maiores editoras de livros didáticos voltados ao ensino público brasileiro.

Outros livros didáticos como “Geração Alpha Matemática” e “Convergências Matemática”, também compõem o PNLD-2020. Porém, não foi possível fazer uma análise sobre objeto de conhecimento e as tecnologias digitais utilizadas nestes dois livros didáticos.

FIGURA 7: LD Geração Alpha Matemática e Convergências Matemática.



Fonte: Oliveira; Fugita (2017) e Chavante (2016)

Todavia, sabe-se que a mediação do professor na leitura dos livros didáticos atrelados às suas metodologias e abordagens, valorizam o livro e faz com que o aluno, ao ler textos, compreenda, exponha e compartilhe conhecimento. Tais práticas permitirá ao estudante discutir e criar hipóteses.

Nesta subseção foram apresentados apenas alguns dos livros didáticos e manuais que alocam a equação do 2º grau para o 8º ano preconizados pela BNCC. Na subseção a seguir faz-se uma introdução da equação polinomial do 2º grau e suas particularidades.

Agora, com a temática bem definida, resta descrever o método e a metodologia que serão utilizadas na presente pesquisa. Assim sendo, no capítulo 3 serão apresentados os procedimentos metodológicos da pesquisa.

2 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo são apresentados todos os procedimentos metodológicos da pesquisa cujas etapas foram organizadas conforme: os participantes da pesquisa; os instrumentos de produção de dados; o produto gerado a partir da pesquisa; as tarefas realizadas pelos estudantes com auxílio do GeoGebra e as etapas do processo de formação das ações mentais para a produção de dados da pesquisa.

Primeiramente, foi escolhida uma escola estadual conforme os pré-requisitos que foram estabelecidos para a pesquisa, são elas: uma escola estadual localizada no município de Boa Vista e que disponha de um laboratório de informática e, da qual, também foi selecionada uma turma de 8º ano. Para tanto, foram realizadas visitas às escolas que dispõem de laboratório de informática com computadores suficientes para suprir a demanda de alunos que a turma possui, sendo no máximo, três estudantes para cada computador.

A escola selecionada deveria possuir um laboratório de, no mínimo, 15 computadores em perfeitas condições (todos os periféricos funcionando perfeitamente). Além disso, o sistema operacional instalado em cada máquina deveria suportar a instalação do GeoGebra Classic 6. A escolha da turma foi feita conforme os apontamentos do professor titular, em que, a turma selecionada seria aquela com maiores dificuldades de aprendizagem e com dois tempos de aulas seguidos.

Após a seleção da escola e da turma deu-se início a pesquisa. De início foi realizada uma avaliação diagnóstica apresentada no Datashow, sem a necessidade do uso do lápis e papel, para sabermos o ponto de partida dos estudantes quanto aos conceitos algébricos que veríamos nas aulas seguintes.

As tarefas seguintes foram realizadas no próprio GeoGebra e, conforme a realização de cada passo da tarefa os estudantes foram orientados a deixá-las salvas no computador para que pudessem dar continuidade às tarefas realizadas. E, para se ter uma segurança quanto ao salvamento das atividades desenvolvidas, todo o conteúdo da tarefa desenvolvida em cada encontro foi salvo em pen-drive e no computador da escola.

A pesquisa mostrou-se viável e acreditamos que terá grande relevância para o ensino de matemática, mais especificamente, para o ensino da álgebra, pois, acreditamos que o Produto Educacional, que é um dos resultados desta pesquisa,

poderá auxiliar professores de matemática na sua futura prática docente. Além disso, proporcionará uma aproximação e envolvimento dos estudantes com uma tecnologia por meio da qual é possível potencializar o aprendizado (MUSSATO, 2015), causando um impacto social e cultural na escola contemporânea.

A realização da pesquisa se deu em dois momentos como mostra o quadro a seguir.

QUADRO 3: Momentos da pesquisa.

MOMENTO 1	MOMENTO 2
Apresentação do material didático, elaborado previamente pelo pesquisador, composto por um tutorial do GeoGebra Classic 6 e sequências de tarefas para o desenvolvimento da habilidade de equações polinomiais do tipo $ax^2 = b$, com a descrição de todos os passos que os estudantes deverão seguir conforme instruções do pesquisador para a realização das atividades elaboradas e desenvolvidas no laboratório de informática.	Coleta e produção de dados a partir das sequência de tarefas realizadas pelos estudantes.
Aplicação de uma avaliação diagnóstica para verificação os conhecimentos prévios dos estudantes sobre conceitos básicos de divisão, raiz quadrada, potenciação, equação do 1º grau e módulo de um número.	Análise dos dados produzidos.
Apresentação dos comandos e ferramentas do GeoGebra aos estudantes na realização cálculos numéricos e algébricos.	Elaboração do Produto Educacional.
Aplicação de uma sequência de tarefas, direcionada aos estudantes, sobre o GeoGebra no desenvolvimento das habilidades em equações polinomiais do tipo $ax^2 = b$.	Análise e discussão dos resultados obtidos.

Fonte: Elaboração do autor

2.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

O cenário desta pesquisa foi a Escola Estadual Monteiro Lobato (EEML) localizada no município de Boa Vista capital do estado de Roraima e, está situada à Rua Cecília Brasil, número 1506, Centro. A escola oferece os anos finais do Ensino Fundamental no turno matutino, Ensino Médio no turno vespertino e Educação de Jovens e Adultos (EJA) para o Ensino Médio no turno noturno e, atende aproximadamente 2.200 alunos.

A escolha pela EEML se deu pelos critérios estabelecidos pelo pesquisador. Dentre eles estava, principalmente, o Laboratório de Informática com número suficiente de computadores em funcionamento e uma turma do 8º ano do Ensino Fundamental.

Portanto, com a escola, a turma do 8º ano e a unidade temática de álgebra estabelecidas pelo pesquisador, deu-se início à pesquisa. Desse modo, os alunos e o professor titular foram informados sobre a habilidade de resolver problemas por meio de tecnologias as equações polinomiais do segundo grau do tipo $ax^2 = b$ que está proposto pela BNCC e, também, da utilização do GeoGebra durante a pesquisa.

Para que a pesquisa tivesse êxito alguns critérios tiveram de ser atingidos, pois mesmo com todos os pré-requisitos já estabelecidos tivemos que seguir todo o protocolo que rege a pesquisa com seres humanos. Assim, os participantes por serem menores de idade, foram postos os seguintes critérios: da Inclusão/Exclusão dos participantes, dos riscos e benefícios para os participantes, do armazenamento e da coleta de dados dos participantes e do custo e financiamento da pesquisa.

Nesta seção são descritos todos os procedimentos necessários que foram seguidos, antes e durante a pesquisa. Tendo em vista o método qualitativo, abordagem (ASPM) e a tecnologia (GeoGebra) a pesquisa careceu do ambiente e da organização para coleta dos dados.

Além disso, é necessário que todos os participantes estivessem cientes da sua participação na pesquisa e, para tanto, foram elaborados os termos de assentimento e consentimento, de suma importância para inclusão ou exclusão do participante. E, também, a descrição dos riscos e benefícios, do custo e financiamento e do armazenamento dos dados coletados.

Sob essa perspectiva, também foram descritos todos os passos que seriam executados durante as aulas, tais como: a apresentação do GeoGebra, janelas, comandos, ícones e demais funcionalidades com respeito aos cálculos algébricos; resolução de problemas de equações polinomiais do 2º grau do tipo $ax^2 = b$; observações e salvamento das tarefas.

Para dar início ao desenvolvimento desta pesquisa foi necessário apresentar aos estudantes o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) (APÊNDICE A). Também foi necessário que os estudantes levassem aos seus pais ou responsáveis, a fim de que eles assinassem o Termo de Consentimento Livre Esclarecido (TCLE) (APÊNDICE B), em que, os pais autorizariam ou não que o estudante participasse da pesquisa.

Com base no referencial teórico, a pesquisa está caracterizada com enfoque qualitativo. Assim, a coleta de dados das categorias teve sua base na análise de dados, constituídos pelo enfoque qualitativo.

Portanto, foram levadas em consideração: as resoluções dos problemas propostos em tarefas e que foram realizadas no GeoGebra, a formação das ações e operações que levaram os estudantes ao desenvolvimento da habilidade proposta. Buscando assim, responder à questão norteadora da pesquisa.

2.1.1 Participantes da Pesquisa

O universo da pesquisa é composto por 01 (uma) turma de alunos matriculados no turno matutino no 8º ano da EEML, totalizando aproximadamente 32 alunos, na faixa etária de 13 a 15 anos. A escolha se deu por uma única turma de 8º ano do Ensino Fundamental nas aulas de matemática.

Deste universo, foram convidados todos os alunos que se dispuseram a participar da pesquisa, durante 15 (quinze) encontros, no horário do turno em que estão matriculados. As atividades foram realizadas três vezes por semana no turno matutino, seguindo o calendário escolar, com 50 (cinquenta) minutos de duração na segunda-feira, 50 (cinquenta) minutos na terça-feira e 100 (cem) minutos na quarta-feira totalizando 4 (quatro) encontros, que corresponderam a 200 (duzentos) minutos semanais.

Foram notificados e incluídos os alunos que:

- Tiveram disponibilidade para participar da pesquisa no horário ao qual estão matriculados;
- Alunos estrangeiros, nacionalizados e brasileiros que apresentaram o Termo de Consentimento Livre Esclarecido (TCLE) autorizativo (APÊNDICE B), que foram assinados pelos pais ou responsáveis para que os alunos participassem da pesquisa e o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) (APÊNDICE A) assinado pelo aluno.

Foram notificados excluídos os alunos que:

- Não tiveram disponibilidade para participar da pesquisa no horário ao qual estão matriculados;
- Alunos estrangeiros, nacionalizados e brasileiros que não apresentaram o Termo de Consentimento Livre Esclarecido (TCLE) autorizativo (APÊNDICE B), que deveria ser assinado pelos pais ou responsáveis para que os alunos participem da pesquisa e o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) (APÊNDICE A) assinado pelo aluno.

Após o TALE e o TCLE elaborados e com a Carta de anuência (APÊNDICE C) assinada, toda a documentação necessária para dar início a pesquisa foram apresentados ao Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos (CEP) (APÊNDICE D). No entanto, houve a necessidade de se fazer um novo envio à Plataforma Brasil com as respectivas traduções para o espanhol do TALE e do TCLE, mas não houve participantes venezuelanos, gerando um novo parecer do CEP (APÊNDICE E).

2.2 UNIDADES DE ANÁLISES

Com base nos preceitos do referencial teórico, foi realizada a análise qualitativa das tarefas desenvolvidas por cada um dos pares e trios de estudantes e, também, de seus comportamentos perante o objeto de conhecimento (equação polinomial do 2º grau) e a TD (GeoGebra), sempre buscando ir de encontro aos objetivos e responder à questão norteadora da pesquisa. Assim, foram realizados 15 encontros, o equivalente a 12 horas e 30 minutos, tempo suficiente para desenvolvermos as tarefas propostas.

Para a execução da SD foi elaborado um plano de aula composto por uma sequência de tarefas durante os encontros. Com o objetivo de explorar o GeoGebra e suas múltiplas funcionalidades, por meio de situações problema para o desenvolvimento das habilidades, fez-se necessária uma intervenção do pesquisador nas aulas de matemática. Dessa forma, cada estudante teve a oportunidade de desenvolver habilidades matemáticas com tecnologias. No quadro 6, são apresentados o planejamento para aplicação das atividades que foram realizadas.

QUADRO 4: Planejamento das Tarefas.

UNIDADE TEMÁTICA: ÁLGEBRA			
Objeto de conhecimento	Objetivos	Encontros	Tarefas
1º – Conhecendo o GeoGebra.	➤ Conhecer as ferramentas do <i>software</i> GeoGebra; ➤ Utilizar as janelas de visualização; ➤ Explorar no GeoGebra as construções de equações por meio do campo de entrada; ➤ Reconhecer ícones e suas propriedades; ➤ Apresentar um problema de equação polinomial do 2º grau do tipo $ax^2 = b$	2	Tarefa 1
2º – Equação polinomial do 2º grau e sua particularidade.	➤ Explorar os conceitos equação polinomial do 2º grau do tipo $ax^2 = b$; ➤ Conhecer as raízes de uma equação polinomial do 2º grau do tipo $ax^2 = b$; ➤ Explorar o GeoGebra para resolução de situações problema; ➤ Explorar no GeoGebra as construções de equações por meio do campo de entrada. ➤ Explorar no GeoGebra as construções de equações por meio da Janela de visualização 2D;	5	Tarefa 2
3º – Equação polinomial do 2º grau do tipo $ax^2 = b$.	➤ Resolver situações problema no GeoGebra; ➤ Explorar no GeoGebra as construções de equações por meio do campo de entrada; ➤ Explorar no GeoGebra as construções de equações por meio do Janela CAS; ➤ Explorar no GeoGebra as construções de equações por meio da Janela de visualização 2D; ➤ Reconhecer padrões do GeoGebra que auxiliam na resolução dos problemas; ➤ Conhecer as raízes de uma equação polinomial do 2º grau do tipo $ax^2 = b$;	2	Tarefa 3

4º – Equação polinomial do 2º grau e outras possibilidades.	➤ Resolver situações problema no GeoGebra; ➤ Explorar no GeoGebra as construções de equações por meio do campo de entrada; ➤ Explorar no GeoGebra as construções de equações por meio do Janela CAS; ➤ Explorar no GeoGebra as construções de equações por meio da Janela de visualização 2D; ➤ Reconhecer padrões do GeoGebra que auxiliam na resolução dos problemas; ➤ Conhecer as raízes de uma equação polinomial do 2º grau do tipo $ax^2 = b$;	3	Tarefa 4
5º – Equação polinomial do 2º grau com geometria.	➤ Resolver situações problema no GeoGebra; ➤ Explorar no GeoGebra as construções de equações por meio do Janela CAS; ➤ Explorar no GeoGebra as construções de equações por meio do Janela de álgebra. ➤ Explorar no GeoGebra as construções de equações por meio da Janela de visualização 2D; ➤ Explorar no GeoGebra as construções de equações por meio da Janela de visualização 3D; ➤ Reconhecer padrões do GeoGebra que auxiliam na resolução dos problemas; ➤ Conhecer as raízes de uma equação polinomial do 2º grau do tipo $ax^2 = b$;	3	Tarefa 0

Fonte: Elaboração do autor

Para a produção dos dados foi levada em consideração o referencial teórico, todas as observações que realizadas durante as aulas, as atividades salvas e as avaliações. No Quadro 7, consta a metodologia utilizada na pesquisa.

QUADRO 5: Programa de produção de dados.

MÉTODO	PROPRIEDADES CONSIDERADAS
Observações	Observaremos: como os estudantes desenvolvem as atividades no GeoGebra; quais suas dificuldades; quais suas facilidades; de que forma podem resolver problemas; se sabem corrigir problemas; se utilizam a ASPM: compreendem, constroem o modelo matemático, resolvem o modelo e interpretam a solução.
Apreciação das Tarefas	Apreciaremos: de que forma os estudantes por meio de TD aplicarão as ferramentas; compreenderão as atividades desenvolvidas no GeoGebra; realizarão os passos corretamente e se dominarão as ferramentas do GeoGebra.
Apreciação das avaliações	Apreciaremos: as produções dos estudantes por meio do GeoGebra na compreensão/assimilação da álgebra; assimilação de equações do tipo $ax^2 = b$ e a utilização da ASPM: compreende, constrói o modelo matemático, resolve o modelo e interpreta a solução.

Fonte: Elaboração do autor

O último encontro serviu para a aplicação da avaliação final sobre o problema inicial e foram coletados os arquivos com as construções realizadas no GeoGebra e para registrar as considerações com relação a utilização do GeoGebra, feitas pelos estudantes e pelo professor responsável pela turma.

Logo, com o encerramento das atividades analisamos as produções relacionadas às etapas da TFEAM, às ações da ASPM, às atividades realizadas no GeoGebra e às avaliações. Acreditamos que, após a análise das etapas e ações realizadas, foi possível reestruturar a SD juntamente com as sequências de tarefas para a redação final do Produto Educacional.

2.2.1 Qualitativa

Por meio das observações, de modo geral, foram avaliados pelos termos teóricos para esclarecer os resultados da assimilação dos conceitos de equação polinomial do 2º grau, fundamentados nas Etapas das Ações Mentais. Para tanto, as características do sistema de ações desenvolvidas no GeoGebra por meio da ASPM

utilizadas para resolver problemas que foram ancoras para a análise do desempenho da aprendizagem (desenvolvimento da habilidade) na dimensão das etapas das ações mentais. Portanto, as características do estudo qualitativo levaram em consideração a produção, a análise e a interpretação dos dados de forma analítica e descritiva.

Também se centrou no desenvolvimento da habilidade dos estudantes de acordo com as etapas das ações mentais e dos conceitos de Galperin (1986). E, os procedimentos da prática (tarefas realizadas no GeoGebra) foram descritos pelo processo da prática metodológica e das ações e operações executadas pelos estudantes. Assim sendo, a pesquisa se deu por meio das análises qualitativas das ações e por resultados dos indicadores dessas ações.

2.2.1.1 Atividade de Situações Problema em Matemática

As ações da ASPM serão analisadas e convertidas em categorias e, as operações em subcategorias. Facilitando, assim, a compreensão das ações pelos estudantes e a análise dessas ações pelo pesquisador. A Atividade de Situações Problema em Matemática é composta por quatro “Categorias” e suas respectivas “Subcategorias”.

A primeira categoria é caracterizada por **Compreender o Problema** e composta pelas subcategorias:

- O estudante extrai os dados do problema;
- O estudante determina as condições do problema;
- O estudante define o(s) objetivo(s) do problema.

A segunda categoria é caracterizada por **construir o modelo matemático**, composta pelas subcategorias:

- Determinar as variáveis e incógnitas;
- Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas;
- Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições;
- Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático.

A terceira categoria é caracterizada por **solucionar o modelo matemático**, composta pelas subcategorias:

- Selecionar o(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático;
- Selecionar um programa informático (GeoGebra) que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático;
- Solucionar o modelo matemático.

A quarta categoria é caracterizada por **interpretar a solução**, composta pelas subcategorias:

- Interpretar o resultado;
- Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema;
- Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema;
- Realizar um roteiro baseado no(s) objetivo(s) do problema;
- Analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.

2.2.1.2 Ações Primárias

As ações primárias referem-se à BOA utilizada para a realização e aplicação da SD no desenvolvimento da habilidade e, conseqüentemente, quanto à habilidade com o GeoGebra para resolver os problemas propostos nas tarefas.

QUADRO 6: Categorias da BOA por etapas de assimilação.

MOTIVACIONAL	Etapa n.º 1	Etapa n.º 2	Etapa n.º 3	Etapa n.º 4	Etapa n.º 5
Forma	Material	Material	Verbal/Externa	Interna	Interna
Generalização	Não generalizado	Pouco generalizado	Generalizado	Generalizado	Generalizado
Explicação	Detalhado	Detalhado	Detalhado	Pouco detalhado	Reduzida
Independência	Compartilhada	Compartilhada	Semi-independente	Semi-independente	Independente
Assimilação	Pouco Consciente	Pouco Consciente	Consciente	Consciente	Automatizado

Fonte: Adaptado de Souza (2020)

Na Generalização, quando o aluno não consegue identificar os atributos básicos do objeto de conhecimento e não consegue resolver o problema que envolve

um novo contexto, dizemos que esta etapa é Não-Generalizada. O caráter Pouco Generalizado ocorre quando o aluno começa a identificar as principais ações e atributos do objeto, porém consegue resolver problemas que envolvem um contexto conhecido. No Generalizado, os alunos definem claramente as ações e atributos básicos do objeto de conhecimento e conseguem resolver facilmente um problema que inclui um novo contexto sem ajuda externa.

A Explicação refere-se à granularidade das ações e operações da ASPM. Elaborar a tarefa pode ajudar a aumentar a assimilação e nesse processo de assimilação de atividades externas em atividades internas, o aluno começa com uma execução detalhada e ainda encurta a execução até atingir a etapa mental de uma explicação breve. Será de caráter Detalhado quando os alunos gravam ou visualizam todas as operações da ASPM realizadas, Pouco Detalhado quando o aluno começa a encurtar certas operações realizadas, ou seja, ele já começou a realizar a ação mentalmente e Reduzida se o aluno não fala ou não registra a operação realizada mentalmente, apenas expõe o resultado.

A Independência refere-se à autonomia do aluno na realização da ASPM. Os alunos iniciam o processo de assimilação com a participação de todos, em que se conclui a tarefa com a ajuda de seu professor ou colega. Ao concluir essas etapas, ele pedirá ajuda somente quando necessário, até que possa fazer e concluir a atividade de forma independente. É Compartilhada quando os alunos frequentemente precisam da ajuda dos professores para entender ou realizar operações da ASPM para resolver problemas, Semi-independente quando os alunos procuram ajuda quando necessitam explicar as operações da ASPM enquanto resolvem problemas e tem caráter de Independência se o aluno não procura ajuda e realiza todas as atividades e operações da ASPM sozinho.

A Assimilação refere-se à capacidade do aluno de realizar ações e operações de forma correta e rápida e do seu nível de consciência ao realizar as ações, reconhecendo erros e acertos (TALÍZINA, 1987, p. 69). Será Pouco consciente quando os alunos não conseguem explicar claramente a realização das operações ASPM e não têm autonomia para corrigir seus erros, pois requer intervenção. Tem caráter Consciente quando os alunos realizam operações ASPM para resolver problemas e concluem com êxito as operações encontrando os erros e Automatizado

quando os alunos podem completar com sucesso as operações da ASPM e identificar seus erros quando ocorrerem.

Deste modo, ficam conceituados os termos teóricos e metodológicos que buscará resultados de assimilação dos estudantes sobre habilidade EF08MA09 e compreensão da situação problema. As características do sistema de ação ASPM usado para resolver o problema serão levados em consideração quanto a análise a eficácia da aprendizagem por etapas da ação mental.

2.2.1.3 Ações Secundárias ou Qualidades da Formação das Etapas

As ações secundárias referem-se à TFEAM para o desenvolvimento da habilidade com equações polinomiais do 2º grau e sua resolução no GeoGebra. Tratando-se basicamente do processo de assimilação do estudante.

QUADRO 7: Categorias da ações secundárias da TFEAM.

Categoria	Característica	Escala
Solidez	Cumprimento eficaz das ações das etapas material até mental	Pouca - Razoável - Alta
Racionalidade	Alto grau de Generalização	Pouca - Razoável - Alta
Consciência	Cumprimento eficaz da etapa verbal	Pouca - Razoável - Alta

Fonte: Adaptado de Leite (2019)

As ações secundárias de Solidez, Racionalidade e Consciência foram utilizadas para a análise da qualidades da formação das etapas mentais. A Solidez depende da fase de execução da ASPM, em que o aluno se encontra, dependendo das características do nível mental mais forte, a assimilação. Refere-se ao nível de assimilação por um período após a formação de ações e operações.

A Racionalidade refere-se ao número de operações da ASPM que auxilia o aluno na resolução das tarefas e que geram uma generalização. A identificação do grau de racionalidade com clareza é uma tarefa difícil. A essência da Consciência refere-se às habilidades de fundamentação, argumentação e correção e que depende da eficácia de sua assimilação na forma verbal externa. Isso ocorre porque os alunos podem observar suas próprias ações e identificar os erros (TALÍZINA, 1987, p. 69).

2.2.2 Observação do Processo de Formação das Habilidades

As observações do processo de desenvolvimento da habilidade se deram conforme os guias de observações adaptados. Estas observações foram guiadas pela ASPM em todo o processo de realização das tarefas. Vale ressaltar que algumas das subcategorias poderão ser observadas apenas nos arquivos do GeoGebra salvos pelos estudantes.

2.2.2.1 Guia de observação da Atividade de Situações Problema

O guia qualitativo de observação das categorias da ASPM serviu para uma análise posterior da coleta dos dados (tarefas realizadas no GeoGebra) salvos em pen-drive. Foram observadas as ações e operações realizadas pelos estudantes ao resolverem os problemas propostos durante a avaliação formativa na realização de cada uma das tarefas.

QUADRO 8: Guia qualitativo de observação das categorias da ASPM.

Guia qualitativa de observação das categorias da ASPM			
Local: Laboratório de informática da EEML		Dia:	Hora:
Objeto da Ação:			
Estudante da Ação:			
Objetivo da Atividade de Estudo:			
Outras características a destacar:			
Categorias	Subcategoria	Descritiva	Interpretativa
Compreensão do Problema	➤ O estudante extrai os dados do problema. ➤ O estudante determina as condições do problema. ➤ O estudante define o(s) objetivo(s) do problema.		
Construção do Modelo Matemático	➤ Determinar as variáveis e incógnitas. ➤ Nominar as variáveis, incógnitas com suas medidas. ➤ Construir o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições. ➤ Realizar análises das unidades de medidas do modelo matemático e critério de aprovação.		
Solução do Modelo Matemático	➤ Selecionar o(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático. ➤ Selecionar um programa informático que contenha os recursos necessários do(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo matemático.		

	➤ Solucionar o modelo matemático.		
Interpretação da Solução	➤ Interpretar o resultado. ➤ Extrair os resultados significativos que tenham relação com o(s) objetivo(s) do problema. ➤ Dar resposta ao(s) objetivo(s) do problema. ➤ Realizar um relatório baseado no(s) objetivo(s) do problema; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com o(s) objetivo(s) do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.		
Outras observações:			

Fonte: Adaptado de Leite (2019)

2.3 INSTRUMENTOS DE PRODUÇÃO DE DADOS

Os instrumentos utilizados para coleta de dados se deram por meio de observações, avaliações e das tarefas feitas no GeoGebra pelos estudantes e salvas em pen drives e computadores. As observações feitas durante a realização das atividades e as anotações das aulas têm relevância e implicaram nos resultados da pesquisa, não se excluindo os outros instrumentos.

Assim, por meio destes instrumentos, buscamos investigar as categorias da Atividade de Situações Problema em Matemática e processo de assimilação de formação das ações mentais. Também foram feitas uma avaliação diagnóstica e a avaliação formativa (contínua durante a realização das tarefas) e a avaliação final, que se deu somente sobre o problema inicial inserida na sequência de tarefas, todas realizadas na interface do GeoGebra.

2.3.1 Avaliação diagnóstica

Para o processo de produção dos dados que se deu pela ASPM realizada no GeoGebra e pelos processos de formação das ações mentais no objeto de conhecimento de equações polinomiais do 2º grau do tipo $ax^2 = b$ fez-se necessária a realização de uma avaliação diagnóstica para sondar os conhecimentos prévios nos estudantes. No entanto, para a realização de uma avaliação diagnóstica foram

abordados conteúdos já estudados em anos anteriores como: módulo, divisão, potenciação e raiz quadrada.

A Avaliação diagnóstica foi composta pelas questões:

1. **Qual a medida do lado de um quadrado de área igual a 121 cm^2 ?** O objetivo dessa pergunta foi verificar se os estudantes internalizaram os conceitos algébricos para o cálculo da área de um quadrado, obtendo-se a raiz quadrada.
2. **Qual a raiz quadrada de 1296?** O objetivo dessa pergunta foi verificar se os estudantes internalizaram os conceitos para extração da raiz quadrada, seja por meio do m.m.c. ou outras formas.
3. **Qual o módulo dos números 2, -5, 36, -91?** O objetivo dessa pergunta foi verificar se os estudantes internalizaram o conceito de valor absoluto de um número.
4. **Para quais valores de x a equação $x^2 - x - 1 = x - 1$ é verdadeira?** O objetivo dessa pergunta foi verificar se os estudantes internalizaram o conceito de equação e verificação dos resultados.
5. **Se $2 \cdot 2 = 2^2$, $x \cdot x = x^2$ então $(x + 2) \cdot (x + 2)$ é?** O objetivo dessa pergunta foi verificar se os estudantes internalizaram o conceito potenciação e produtos notáveis.
6. **Qual o quociente da divisão de 3132 por 9?** O objetivo dessa pergunta foi verificar o nível de dificuldades dos estudantes na realização de cálculos de uma divisão simples.
7. **Qual o produto de $x \cdot (2x + 3)$?** O objetivo dessa pergunta foi verificar se os estudantes conseguem aplicar a propriedade distributiva com incógnitas.

Todas as sete perguntas estabelecidas na avaliação diagnóstica serviram para constatar o nível de partida dos estudantes aproximando-os, em certa medida, do objeto de conhecimento, que foi posteriormente apresentado a eles. Assim, os objetivos de cada questão estão postos para obtenção de conceitos estudados em anos/séries anteriores.

2.3.2 Avaliação Formativa

A avaliação formativa foi realizada de forma contínua com questões que compõe as tarefas da SD elaboradas com o objetivo de verificar o desenvolvimento do processo de assimilação do objeto de conhecimento pelos estudantes, o que direciona os estudantes ao desenvolvimento de habilidades. A sequência de tarefas está inserida no produto educacional.

As quatro perguntas realizadas nesta avaliação foram denominadas Tarefas, são elas:

Tarefa 1: Um tapete possui uma área quadrada de 5 m^2 . Qual é a medida do lado deste tapete?

Tarefa 2: Uma fazenda possuía 3 celeiros quadrados de mesma área para guardar arroz, feijão e trigo, ocupando uma área total de 300 m^2 . Qual é a medida do lado do celeiro destinado para o armazenamento do arroz?

Tarefa 3: Uma colcha com 10 retalhos quadrangulares idênticos possui uma superfície de 2 m^2 . Qual seria a medida do lado de cada retalho?

Tarefa 4: Determine o lado de um quadrado que é face de um cubo que possui superfície total medindo 150 cm^2 .

Após a realização da pesquisa foram feitas alterações nas Tarefas da avaliação formativa para que ajudasse os estudantes na leitura e interpretação dos problemas.

2.3.3 Avaliação Final

A avaliação final se deu apenas sobre o problema inicial (situação problema) da sequência de tarefas e teve como objetivo verificar todo o processo de assimilação e aprendizagem dos estudantes, ou seja, o desenvolvimento da habilidade de resolver problemas de equações polinomiais do tipo $ax^2 = b$, da qual mostrou-se alguns resultados pertinentes a investigação.

Como colocado anteriormente, a avaliação final estava composta apenas pelo problema inicial. O problema inicial foi apresentado aos estudantes logo no início de nossos encontros como nossa principal situação problema, em que, se necessitaria da aplicação de todas as habilidades desenvolvidas pelos estudantes durante toda a avaliação formativa.

A avaliação final trata-se de uma questão com um certo grau de complexidade e que favorece a utilização do GeoGebra no processo de sua resolução. Portanto, a avaliação final teve maior relevância na análise e discussão dos resultados.

A avaliação final foi denominada de Tarefa 0 e foi apresentado aos estudantes logo ao início da pesquisa como problema inicial. O problema inicial conta com quatro itens a serem respondidos.

Problema inicial: Um terreno tem um formato quadrangular com 40 m de lado. O dono do terreno precisa fazer uma alteração para que ele passe a ter apenas 1200 m^2 de área. Para isso, achou viável reduzir a largura e aumentar o comprimento na mesma medida.

- a) Escreva uma equação que represente a situação problema.
- b) Utilizando a propriedade distributiva, desenvolva a equação.
- c) É possível encontrar uma equação equivalente a essa na forma $x^2 = b$, onde b é um número real?
- d) Quais são os valores para x ?

3 PRODUTO EDUCACIONAL

Conforme o regimento do PPGEc da Universidade Estadual de Roraima, tem-se como requisito final a entrega de um PE como resultado da pesquisa, fato que leva a uma variedade de opções como: uma Sequência Didática, um Livro, um e-book, Materiais manipuláveis, cartilha, um aplicativo computacional, um jogo, um vídeo, videoaulas, equipamento, uma exposição etc. (CAPES, 2013).

Ao utilizar o GeoGebra, tivemos a possibilidade de salvar as atividades, tanto no site do GeoGebra quanto em pen-drive, podendo, assim, retomá-las em outro momento. Como apoio a esse material, apresentamos um tutorial resumido do GeoGebra Classic 6. Assim, como um dos resultados da pesquisa apresentamos o produto educacional, um e-book composto por uma Sequência Didática com tarefas utilizadas na pesquisa e outras adicionais e um Tutorial do GeoGebra Classic 6.

No produto educacional é apresentado um arcabouço do PE que está constituído por tarefas e que permitirá que os estudantes resolvam e elaborem problemas relacionadas às equações polinomiais do 2º do tipo $ax^2 = b$ no GeoGebra. Assim, acreditamos que o produto, se bem utilizado pelo professor, permitirá que os estudantes desenvolvam as habilidades relativas à resolução de equações polinomiais do 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

As sequências de tarefas encontram-se em processo de elaboração, pois, pretendemos, primeiramente, organizar as atividades em uma sequência lógica e engajadora e, também, elaborar planos de aulas de cada sequência de atividades com o objetivo de auxiliar o professor na organização delas. O GeoGebra é um destes *softwares* que segue em constante atualização sendo assim, o *software* será apresentado na subseção a seguir.

3.1 O GEOGEBRA COMO MATERIAL DIDÁTICO

O GeoGebra é um *software* de geometria dinâmica que abrange geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em uma única interface gráfica, ou seja, é uma multiplataforma que proporciona várias resoluções de problemas. O GeoGebra é um *software* livre criado para ser utilizado em todos os níveis de ensino e segundo Basniak e Estevam (2014, p. 13) “possui uma interface amigável que facilita a criação

de construções matemáticas e modelos que permitem explorações interativas, arrastando objetos e alterando parâmetros”.

O GeoGebra foi criado pelo austríaco Markus Hohenwarter para ser utilizado em sala de aula. O projeto teve início em 2001 e encontra-se em constante atualização. O GeoGebra apresenta muitas vantagens para a aprendizagem com tecnologia, como por exemplo, a possibilidade exibir diferentes representações de um mesmo objeto por janelas que interagem entre si. Apresenta, também, recursos didáticos por possibilitar a criação de figuras, que são salvas como PNG¹³ e, posteriormente, utilizadas em editores de texto. Do mesmo modo, Hohenwarter (2014, p. 11) conclui expondo que:

O software de matemática dinâmica GeoGebra oferece a possibilidade de gerar applets interativos para uso em ambientes de aprendizagem. Seus gráficos, álgebra, álgebra computacional e visualizações de planilhas combinam representações matemáticas entre si de forma interativa e caminhos conectados. Por um lado, o software facilita a visualização de dados matemáticos conceitos e fatos. Por outro lado, o GeoGebra suporta a interação de diferentes formas de representação de objetos matemáticos.

O GeoGebra Classic 6 que será utilizado nesta pesquisa, está disponível para download¹⁴ em português e seus aplicativos são gratuitos e podem ser baixados para os sistemas: iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux.

O GeoGebra encontra-se disponível on-line e para download nas versões: Calculadora Gráfica, em que possibilita o usuário traçar gráfico de funções, resolver equações etc.; 3D Calculator, em que é possível representar funções 3D, superfícies e outros objetos em 3D; Geometria para a Construção de figuras planas, ângulos, transformações etc.; GeoGebra Classic 6 que reúne todos os aplicativos como geometria, planilha, probabilidade e CAS (Computer Algebra System) Sistema de Álgebra Computacional para cálculos simbólicos e, agora, em 2020 foi lançado o GeoGebra notes¹⁵ que funciona como um bloco de notas e tem como possibilidades a inserção de vídeos, texto, equações a janela CAS e outros anexos.

Há, também, os aplicativos apenas para download a Realidade Aumentada, que possibilita introduzir a matemática 3D ao mundo real e o GeoGebra Classic 5 que

13 PNG (*Portable Network Graphics*) é um formato de dados utilizado para imagens.

14 <https://www.geogebra.org/download?lang=pt>

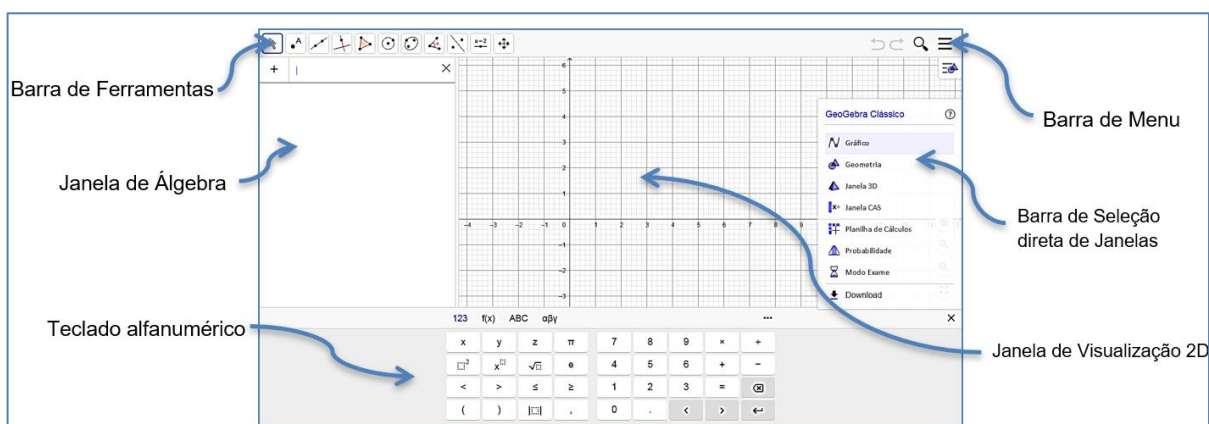
15 <https://www.geogebra.org/notes>

reúne todos os aplicativos como geometria, planilha, probabilidade e CAS. Deste modo, Basniak e Estevam (2014, p. 14) consideram que:

Um aspecto importante a ser considerado ao se trabalhar no GeoGebra é verificar a versão em que está trabalhando, tendo em conta que ele vem sendo atualizado constante e continuamente e muitas de suas ferramentas e funções têm sofrido mudanças de acordo com essas atualizações.

Na Figura 1 é apresentada a tela inicial do GeoGebra Classic 6, que comparada às versões anteriores, que em sua versão 6 possui mais ícones de acesso e de fácil manipulação. Também há um teclado alfanumérico que dá acesso aos símbolos matemáticos e, que pode ser minimizado e maximizado quando necessário, o que facilita a introdução dos comandos apenas com a utilização do mouse ou dedo caso seja utilizado no smartphone.

FIGURA 8: Janela de Visualização inicial do GeoGebra Classic 6.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

No produto educacional constará um breve tutorial para o GeoGebra Classic 6 que compõe o produto educacional. Contudo, durante a pesquisa foram utilizadas, principalmente, as Janelas de visualização 2D e a Janela CAS e, em algumas tarefas, também foi utilizada a Janela de visualização 3D.

No site¹⁶ do GeoGebra: “O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculo em um pacote fácil de usar. O GeoGebra é uma comunidade em rápida expansão, com milhões de usuários localizados em praticamente todos os países do mundo. O GeoGebra tornou-se líder no fornecimento de *software* de matemática dinâmica, apoiando a educação e as inovações da Ciência, Tecnologia,

16 www.geogebra.org

Engenharia e Matemática (STEM) no ensino e aprendizagem em todo o mundo”. Além disso, é ganhador de vários prêmios na Europa e nos Estados Unidos.

O GeoGebra é um *software*/aplicativo educativo utilizado como ferramenta no ensino de matemática em várias escolas e universidades e, que oferece acesso a visual em suas Janelas de Visualização e recursos numéricos, algébricos e geométricos em suas Barras de Ferramentas. O GeoGebra foi criado pelo austríaco Markus Hohenwarter¹⁷.

O GeoGebra utilizado neste curso será a versão 6 disponível para download em português, e seus aplicativos são gratuitos e podem ser baixados para os sistemas: iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook e Linux. A figura a seguir apresenta a tela inicial do GeoGebra em sua versão 6.

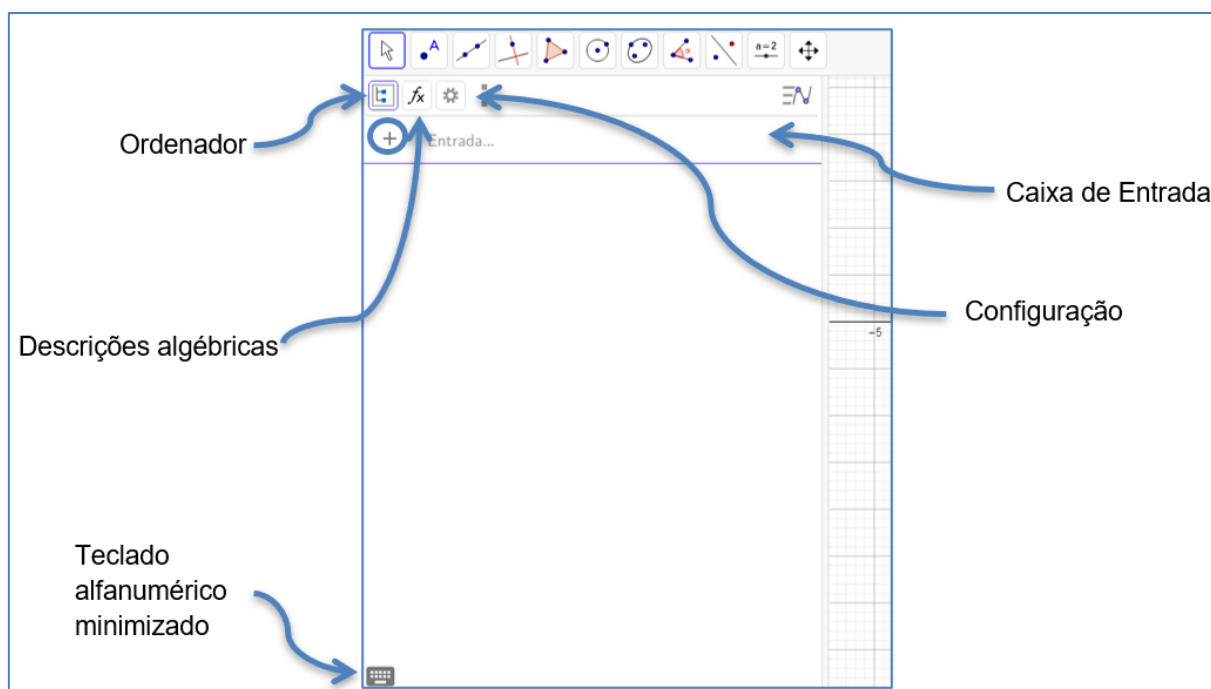
3.2 JANELAS DO GEOGEBRA

Algumas Janelas podem ser acessadas individualmente, como mostrado na Barra de Menu com as Disposições, logo ao inicializar o *software* na **Barra de seleção direta de janelas**.

3.2.1 Janela de Álgebra

A Janela de Álgebra mostra todas as entradas, sejam objetos ou funções matemáticas.

¹⁷ Departamento de Educação Matemática, Universidade Johannes Kepler (JKU), Linz – Áustria.

FIGURA 9: Janela de álgebra.

Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Ao selecionar o ícone circulado na figura anterior se abrirá uma janela com as opções de Expressão, Texto, Imagem e Ajuda.

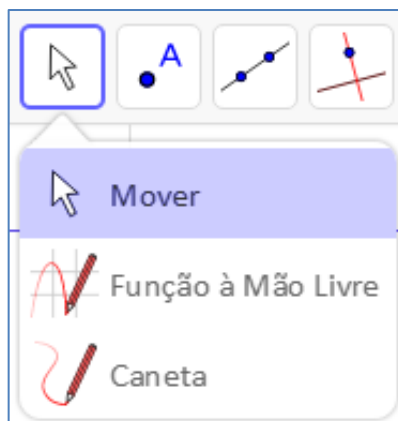
Como na versão do GeoGebra 3.2, a barra de ferramentas apresenta 11 ícones iniciais e outras 59 ferramentas minimizados, uma a mais que na sua versão 3.2, na qual cada ferramenta possui uma funcionalidade específica. A figura seguir mostra os 11 ícones de ferramentas iniciais.

FIGURA 10: Barra de ferramentas Janela de álgebra.

Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Como exposto no parágrafo anterior, cada um dos ícones de ferramentas acima, possui algumas outras ferramentas minimizadas, de maneira que, ao clicar em algum ícone das ferramentas iniciais, se abrirá outras ferramentas. Por exemplo, ao clicar no ícone da ferramenta “A”, ela nos mostrará a seguinte aba de opções.

FIGURA 11: Ícone Mover da barra de ferramentas.

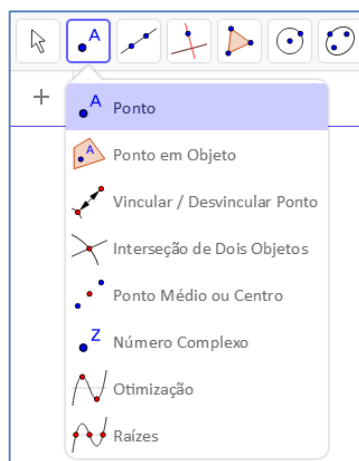


Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Temos, então que, com a ferramenta “**Mover**” podemos selecionar, arrastar e manipular objetos; com a ferramenta “**Função à mão livre**” podemos desenhar uma função ou algum objeto geométrico, porém, tem suas limitações e com a ferramenta “**Caneta**” podemos escrever ou desenhar qualquer coisa.

Ao clicar no ícone da ferramenta “**B**”, ela nos mostrará a seguinte aba de opções:

FIGURA 12: Ícone Ponto da barra de ferramentas.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Com a ferramenta “**Ponto**” podemos inserir um ponto, e se continuarmos, vários pontos podem ser inseridos na janela de visualização, também podemos inseri-lo numa curva ou função; com a ferramenta “**Ponto em Objeto**” pode-se fixar um ponto numa determinada curva ou objeto, delimitando sua fronteira; com a ferramenta

“**Vincular/ Desvincular Ponto**”, como o nome sugere, essa ferramenta vincula ou desvincula um ponto de uma função ou objeto.

A ferramenta “**Interseção de Dois Objetos**” inclui um ponto na interseção entre os objetos, caso tenha interseção; a ferramenta “**Ponto Médio ou Centro**” acrescenta um ponto médio entre dois pontos criados anteriormente ou pode-se acrescentá-los e automaticamente será gerado um ponto entre eles; a ferramenta “**Número Complexo**” gera um número complexo conforme a posição selecionada na janela de visualização; com a ferramenta “**Otimização**” acrescenta um ponto nos extremos locais de uma função ou nas bordas de um objetos e com a ferramenta “**Raízes**” nos mostrará todos os pontos em que a função corta o eixo das abscissas.

O ícone da ferramenta “**C**” nos mostra uma janela com opções de manipulação com reta, semirreta, seguimento e vetores.

FIGURA 13: Ícone Reta da barra de ferramentas.



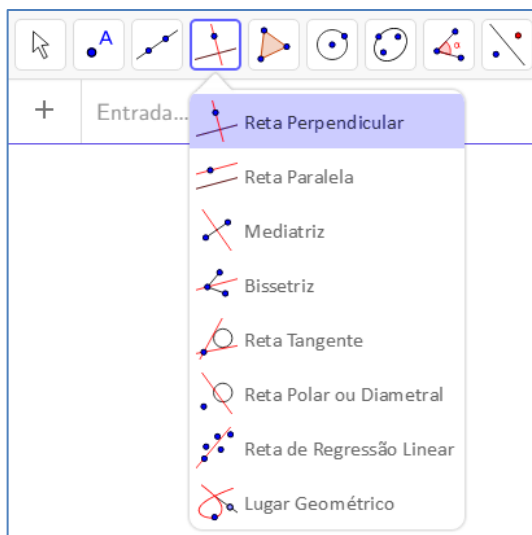
Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Na ferramenta “**Reta**” ao selecionarmos dois pontos ou duas posições na janela de visualização cria-se uma reta definida por esses dois pontos; com a ferramenta “**Seguimento**” podemos inserir seguimentos de reta, dado dois pontos; a ferramenta “**Seguimento com Comprimento fixo**” assim como na ferramenta seguimento, quando selecionada, cria um seguimento de reta entre dois pontos, mas com medida fixa; a ferramenta “**Semirreta**” cria justamente uma semirreta a partir de um ponto inicial e outro ponto qualquer; a ferramenta “**Caminho Poligonal**” quando selecionada, cria um caminho a partir dos vértices de uma dada função; a ferramenta

“**Vetor**” quando selecionada, cria um vetor, dado dois pontos e com a ferramenta “**Vetor a Partir de um Ponto**” selecionada, podemos criar um vetor paralelo ou criar uma direção pra um dado ponto.

O ícone da ferramenta “**D**” nos mostrará uma janela de opções de manipulação com retas, com ferramentas específicas como mostrado na figura a seguir:

FIGURA 14: Ícone Reta Perpendicular da barra de ferramentas.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A ferramenta “**Reta Perpendicular**” quando selecionada, cria uma reta perpendicular a partir de uma reta, semirreta, seguimento de reta ou vetor criado anteriormente; a ferramenta “**Reta Paralela**” quando selecionada, cria a partir de um ponto e uma reta ou semirreta ou seguimento de reta ou vetor, uma reta paralela; a ferramenta “**Mediatriz**” quando selecionada, cria-se uma reta mediatriz e perpendicular entre dois pontos selecionados numa reta ou num seguimento de reta; já a ferramenta “**Bissetriz**” quando selecionada, cria reta que corta um ângulo implícito ou explícito entre duas retas ou semirretas ou seguimentos de retas, e criando ao mesmo tempo uma reta perpendicular à bissetriz a partir do ponto de origem do ângulo formado.

A ferramenta “**Reta Tangente**” quando selecionada, criará automaticamente uma reta tangente no ponto da curva, ao clicar no ponto que está na curva selecionando os dois; com a ferramenta “**Reta Polar ou Diametral**” podemos criar uma linha polar ou diâmetro selecionando primeiramente um ponto ou reta e posteriormente um círculo ou cônica; a ferramenta “**Reta de Regressão Linear**”

quando selecionada, cria uma reta linear entre os pontos que se deseja fazer uma regressão linear, porém, todos os pontos devem ser selecionados com o botão direito do mouse; a ferramenta **“Lugar Geométrico”** quando selecionada, descreve o movimento de um dado objeto, que vai sendo construído ao longo de sua trajetória.

O ícone da ferramenta **“E”** nos mostra uma janela de opções para a construção de polígonos, como mostra a figura:

FIGURA 15: Ícone Polígono da Barra de ferramentas.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Com a ferramenta **“Polígono”**, podemos desenhar um polígono de **N** lados, e para concluir a figura temos de voltar ao ponto inicial da criação do mesmo; a ferramenta **“Polígono Regular”** também cria um polígono, porém, com lados iguais, em que dado dois pontos abrir-se-á uma janela para digitarmos quantos lados queremos que tenha o nosso polígono regular; a ferramenta **“Polígono Rígido”** nos possibilita criar um polígono que não se podem redimensionar os lados criados; com a ferramenta **“Polígono Semideformável”** selecionada, podemos criar um polígono qualquer, porém, automaticamente serão criados controles deslizantes, que percorrem a horizontal e a vertical num intervalo dado.

O ícone da ferramenta **“F”** contém nove ferramentas para criação de círculos, setores circulares e arcos, como vemos na seguinte figura.

FIGURA 16: Ícone Círculo da barra de ferramentas.



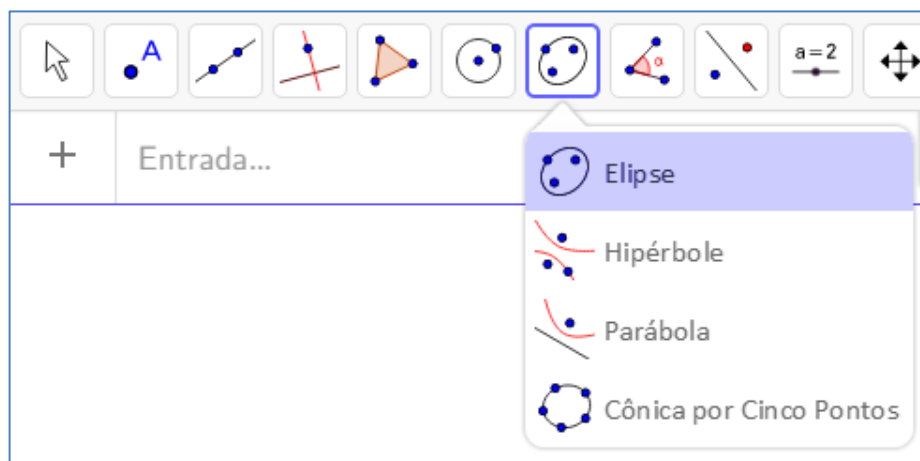
Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A ferramenta “**Círculo dados Centro e Um de seus Pontos**” cria um círculo por meio do primeiro ponto selecionado (centro do círculo) e outro ponto que se deseja que faça parte da borda do círculo; com a ferramenta “**Círculo dados Centro e Raio**” podemos criar um círculo escolhendo-se onde será o seu centro, e logo após abrirá uma janela para que se digite o tamanho do raio do círculo; com a ferramenta “**Compasso**” também podemos criar um círculo, porém, temos de selecionar dois pontos quaisquer ou dois de um seguimento de reta, onde, o primeiro ponto estará na borda e o segundo será o seu centro; a ferramenta “**Círculo definido por Três Pontos**” cria-se justamente o que ela sugere, um círculo escolhendo-se três pontos; com a ferramenta “**Semicírculo Definido por Dois Pontos**” também, sugere o que essa ferramenta pode criar, ou seja, um semicírculo a partir de dois pontos, criando-se sempre em sentido horário.

E com a ferramenta “**Arco Circular**” podemos criar um arco dados o ponto central e outros dois pontos; com a ferramenta “**Arco Circuncircular**” podemos criar um arco a partir de três pontos escolhidos; com a ferramenta “**Setor Circular**” cria-se um setor circular opaco a partir da escolha do centro e outros dois pontos e com a ferramenta “**Setor Circuncircular**” cria-se um setor Circuncircular a partir de três pontos.

O ícone da ferramenta “**G**” contém algumas ferramentas de construção das curvas cônicas, ou seja, da Elipse, Hipérbole e Parábola.

FIGURA 17: Ícone Elipse da barra de ferramentas.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A ferramenta “**Elipse**” constrói uma elipse a partir de três pontos, sendo dois focos e o terceiro ponto na curva; com a ferramenta “**Hipérbole**”, assim como com a ferramenta elipse, podemos construir uma hipérbole com três pontos, sendo dois focos e um ponto na curva; com a ferramenta “**Parábola**” podemos construir uma parábola utilizando um ponto e tendo uma reta diretriz e a ferramenta “**Cônica por Cinco Pontos**” constrói uma elipse, parábola ou hipérbole a partir de cinco pontos.

O ícone da ferramenta “**H**” contém ferramentas auxiliares como: marcar e medir o ângulo, mostrar o comprimento, mostrar a área, mostrar a relação e a inclinação.

FIGURA 18: Ícone Ângulo da barra de ferramentas.



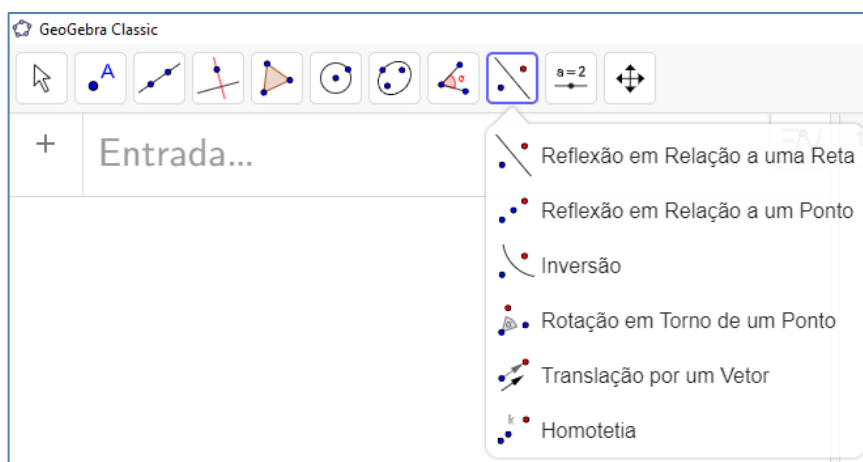
Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Com a ferramenta “**Ângulo**” é possível marcar ângulo interno ou externo entre duas retas, semirretas ou segmentos de retas, ou medir um ângulo a partir de três pontos; com a ferramenta “**Ângulo com Amplitude Fixa**” pode-se construir um ângulo a partir de dois pontos, porém, sua medida será pré-definida numa segunda janela, onde se deverá escolher o sentido do ângulo a ser criado (horário ou anti-horário); a ferramenta “**Distância, Comprimento ou Perímetro**” nos mostra a distância ou o comprimento entre dois pontos ou dois objetos e, se tratar de um polígono a ferramenta fixa o comprimento de cada lado e mostra o perímetro; a ferramenta “**Área**” mostra a área de uma região delimitada.

A ferramenta “**Inclinação**” mostra a inclinação de uma reta; com a ferramenta “**Lista**” podemos criar uma lista de objetos ou pontos e, para isso devemos selecionar, primeiramente, os objetos e só depois a ferramenta lista; a ferramenta “**Relação**” mostra se há ou não uma relação entre dois ou mais objetos, ou seja, se são colineares, se há interseção etc.; a função “**Inspetor de Funções**” nos mostra uma análise feita de um intervalo de um dado gráfico de uma função construído, mostrando o ponto de máximo, o ponto de mínimo, raízes, valor da área, valor da integral e a média.

No ícone da ferramenta “**I**” contém algumas ferramentas de reflexão de objetos, ou seja, de simetria. Além de outras ferramentas como mostra a figura a seguir:

FIGURA 19: Ícone Reflexão da barra de ferramentas.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A ferramenta **“Reflexão em Relação a uma Reta”** constrói um reflexo (simetria axial) com relação a uma reta de um ponto, círculo, reta, polígono etc. E o mais interessante é que o reflexo herda todas as características do objeto; com a ferramenta **“Reflexão em Relação a um Ponto”** podemos, também, construir um reflexo (simetria central), porém, com relação a um ponto; com a ferramenta **“Inversão”** podemos construir o reflexo de um ponto sobre um círculo; com a ferramenta **“Rotação em Torno de um Ponto”** criamos o reflexo (simetria rotacional) ao redor de um ponto por um ângulo fixo que será determinado numa nova janela, em sentido horário ou anti-horário; com a ferramenta **“Translação por um Vetor”** podemos construir o reflexo (simetria de translação) de um objeto a partir de um vetor e com a ferramenta **“Homotetia”** podemos construir uma Homotetia de um objeto a partir de um ponto ou fator comum (uma razão de semelhança).

O ícone de ferramentas **“J”** contém algumas ferramentas para inserir na janela de visualização e servem como auxiliares a aplicações, como imagem, controle deslizante, texto, botão, caixa e campo de entrada.

FIGURA 20: Ícone Controle deslizante da barra de ferramentas.

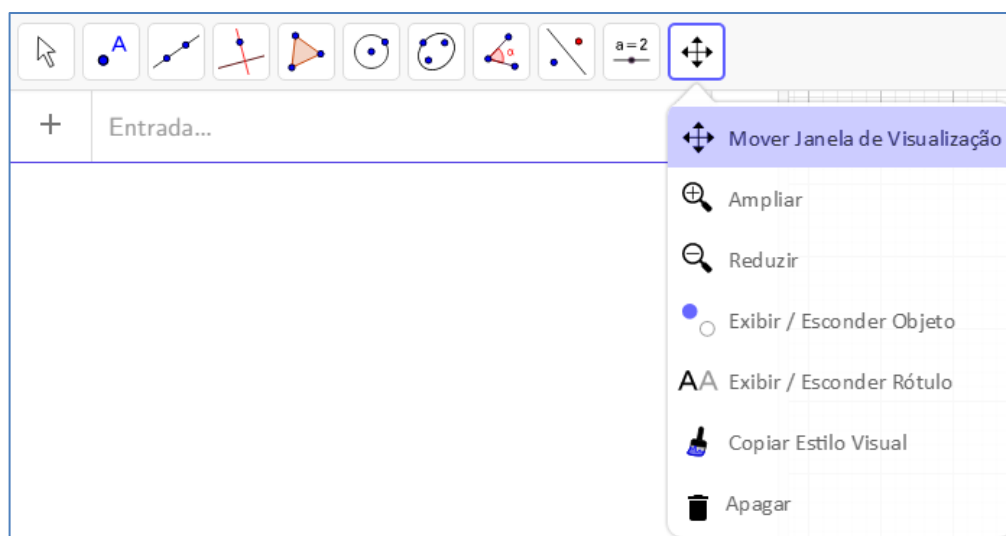


Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Com a ferramenta “**Controle Deslizante**” podemos modificar um parâmetro, muito usado no estudo de funções; com a ferramenta “**Texto**” podemos inserir um texto que será digitado numa segunda janela e o respectivo texto aparecerá na janela de visualização; com a ferramenta “**Botão**” podemos criar um botão com uma legenda e um código a ser definido e que deverá ser digitado em uma segunda janela; a ferramenta “**Caixa para Exibir/ Esconder Objetos**” nos permite exibir e esconder objetos que já foram inseridos na janela de visualização e, que deverão ser selecionados numa segunda janela e, ainda podemos escolher uma legenda para o que será escondido/exibido e com a ferramenta “**Campo de Entrada**” podemos criar uma legenda para um dado objeto.

O ícone de ferramentas “**K**” contém ferramentas que auxiliam na parte visual da janela de exibição.

FIGURA 21: Ícone Mover janela de visualização da barra de ferramentas.



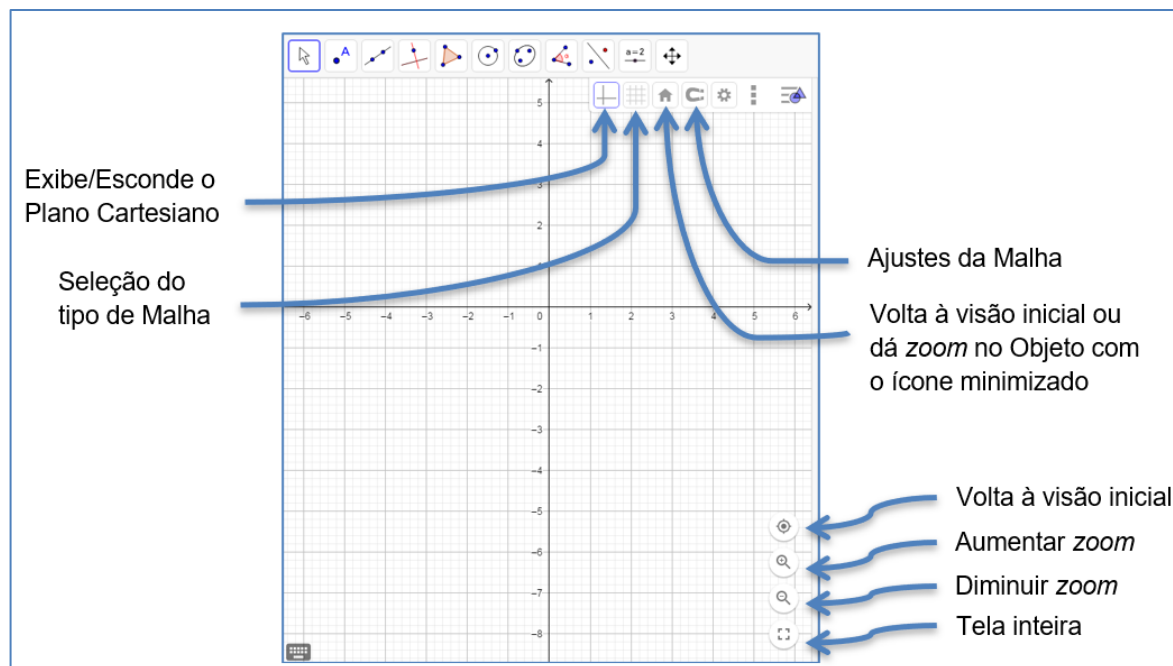
Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Com a ferramenta **“Mover Janela de visualização”** podemos fazer como o nome da ferramenta sugere; com as ferramentas **“Ampliar”** e **“Reduzir”** podemos aumentar e diminuir o zoom ao clicar num lugar da janela de visualização; com a ferramenta **“Exibir/ Esconder Objeto”** podemos esconder/exibir cada objeto na janela de visualização; com a ferramenta **“Exibir/ Esconder Rótulo”** podemos esconder/exibir qualquer rótulo de objetos na janela de visualização; com a ferramenta **“Copiar Estilo Visual”**, como o nome da ferramenta sugere, podemos copiar o estilo de um objeto e aplicá-lo a outros objetos na janela de visualização e a ferramenta **“Apagar”** quando selecionada, pode apagar todos os objetos na janela de visualização um a um.

3.2.2 Janela de Visualização

A Janela de Visualização exibe um Plano cartesiano com uma malha quadriculada, onde são apresentados as funções matemáticas e os objetos que são inseridos.

FIGURA 22: Janela de visualização.

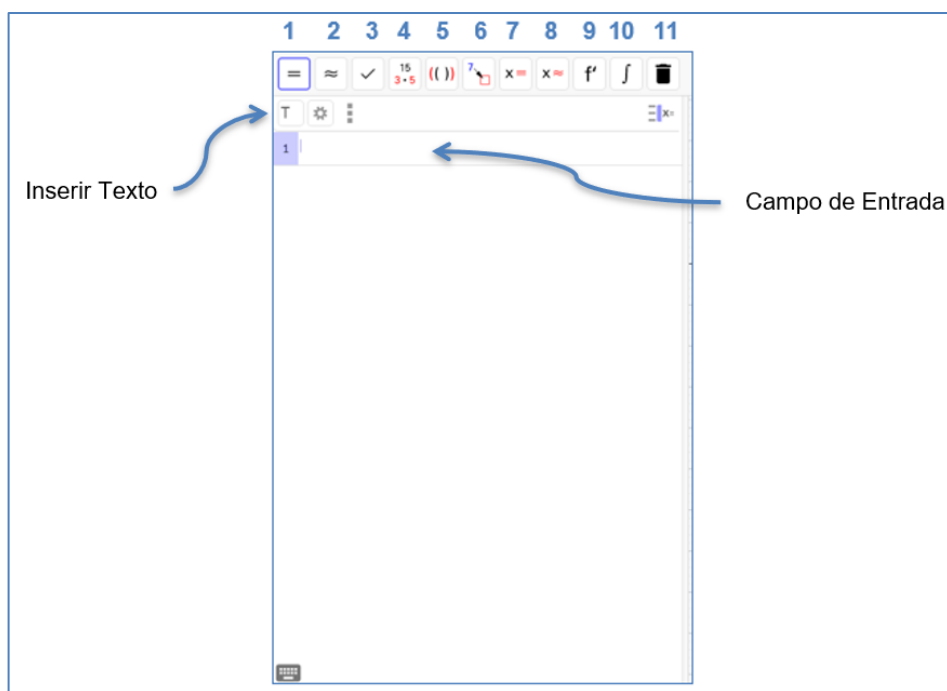


Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Também há uma segunda janela de visualização chamada **Janela de Visualização 2**, que tem as mesmas características da Janela de Visualização, porém, quando selecionada em Exibir na Barra de Menu, a janela abrirá sem a malha e sem as opções de voltar à visão inicial e aumentar/ diminuir zoom como mostrado no canto inferior direito da figura anterior.

3.2.3 Janela CAS

A Janela CAS é utilizada para cálculos numéricos e algébricos e seus ícones de ferramentas contém apenas algumas funcionalidades, contudo, em sua entrada de dados não são feitas algumas operações automaticamente, se dermos um “Enter” em qualquer operação ela apenas será mantida.

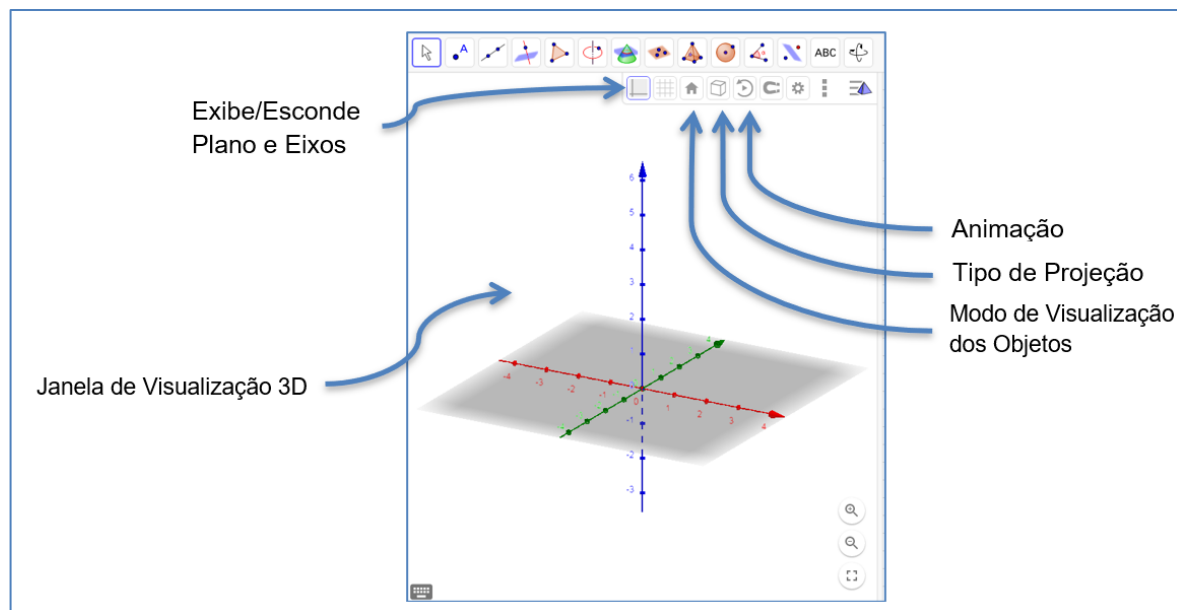
FIGURA 23: Janela CAS.

Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A Barra de ferramentas da Janela CAS contém a ferramenta “1” que faz uma avaliação exata ou simbólica; a ferramenta “2” que mostra a aproximação decimal; a ferramenta “3” que mantém e verifica a entrada; a ferramenta “4” que mostra a fatoração de um dado número; a ferramenta “5” que expande os parênteses; a ferramenta “6” que substitui uma expressão; a ferramenta “7” que resolve uma ou mais equações; a ferramenta “8” que resolve uma equação ou um sistema; a ferramenta “9” que calcula a derivada primeira; a ferramenta “10” que mostra a primitiva de um função matemática e a ferramenta “11” que serve para apagar objetos selecionado.

3.2.4 Janela de Visualização 3D

A Janela de Visualização 3D, como sugere seu nome, é muito utilizada para visualização de figuras tridimensionais como cubo, esfera, pirâmide, cone, prisma, cilindro dentre outras. E, assim como na janela inicial do GeoGebra e a Janela CAS, a Janela de Visualização tem sua Barra de Ferramentas específicas para aplicações em 3D.

FIGURA 24: Janela de Visualização 3D.

Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

As outras opções da janela 3D como Malha, Modo de captura e Configurações têm as mesmas funcionalidades da janela de visualização inicial.

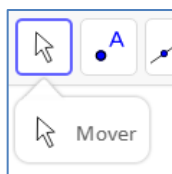
Na Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D contém 14 ícones de ferramentas iniciais e outras 52 ferramentas minimizadas e algumas das ferramentas apresentadas pela Janela de Visualização inicial, também, se repetem nesta janela.

FIGURA 25: Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.

Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A ferramenta “a” já conhecemos, pois foi apresentada na Barra de ferramentas da **seção 1.1**, porém, na janela 3D apresenta-se apenas a ferramenta “Mover”, como mostra a figura a seguir.

FIGURA 26: Ícone Mover da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O ícone da ferramenta “b” contém as mesmas ferramentas da janela de visualização inicial na ferramenta “B”, porém, não temos à disposição as ferramentas “Número Complexo”, “Raízes” e “Otimização” como podemos ver na figura a seguir.

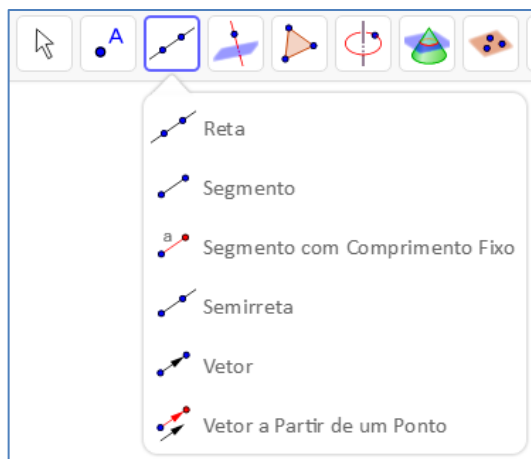
FIGURA 27: Ícone Ponto da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O ícone da ferramenta “c” também contém as mesmas ferramentas da janela de visualização inicial, com exceção da ferramenta “Caminho Poligonal” como mostra a figura seguinte.

FIGURA 28: Ícone Reta da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O ícone da ferramenta “d” também contém as mesmas ferramentas da janela de visualização inicial, com exceção das ferramentas “Reta Polar ou Diametral” e “Reta de Regressão Linear”, porém, a ferramenta “**Reta Perpendicular**” criará uma reta perpendicular com relação à outra reta e, também, a um plano como na figura a seguir.

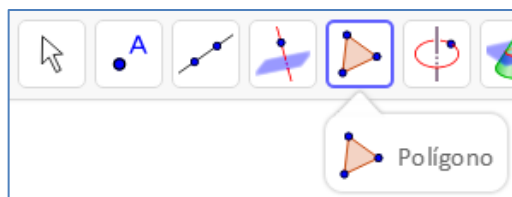
FIGURA 29: Ícone Reta Perpendicular da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O ícone da ferramenta “e” contém apenas a ferramenta “**Polígono**”, onde podemos desenhar um polígono de **N** lados utilizando os três eixos.

FIGURA 30: Ícone Polígono da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.

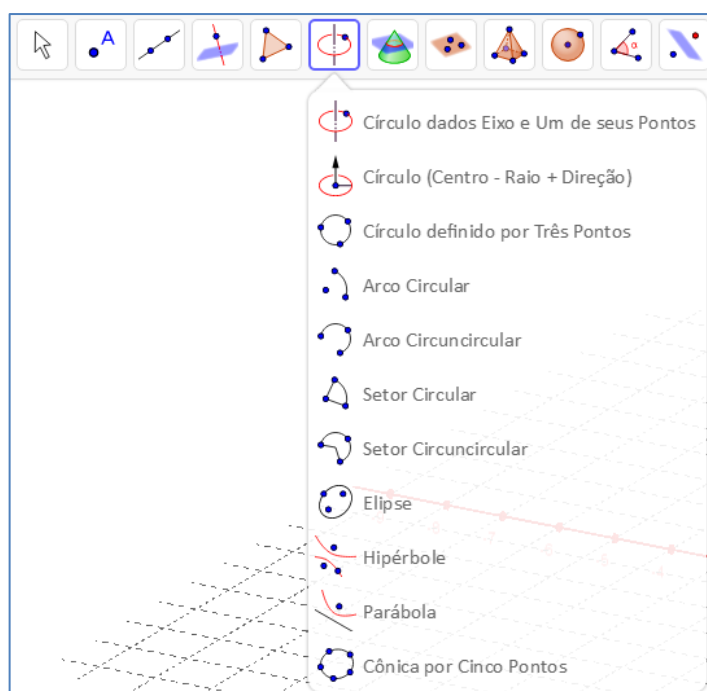


Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O ícone da ferramenta “f” contém duas ferramentas novas e une cinco ferramentas da Barra de ferramentas inicial “F” (Círculo definido por Três Pontos, Arco Circular, Arco Circuncircular, Setor Circular e Setor Circuncircular) e as quatro ferramentas de “G” (Elipse, Hipérbole, Parábola e Cônica por Cinco Pontos), todas estas com as mesmas funcionalidades.

A ferramenta “**Círculo dados Eixo e um de seus Pontos**” cria um círculo selecionando o eixo e um ponto do círculo e com a ferramenta “**Círculo (Centro - Raio + Direção)**” cria-se um círculo selecionando-se o centro e direção e, logo após abrir-se-á uma janela para inserir o valor do raio.

FIGURA 31: Ícone Círculo da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O ícone da ferramenta “g”, como mostra a figura a seguir é única e, quando selecionada nos mostra o que sua descrição sugere a “**Interseção entre duas Superfícies**”.

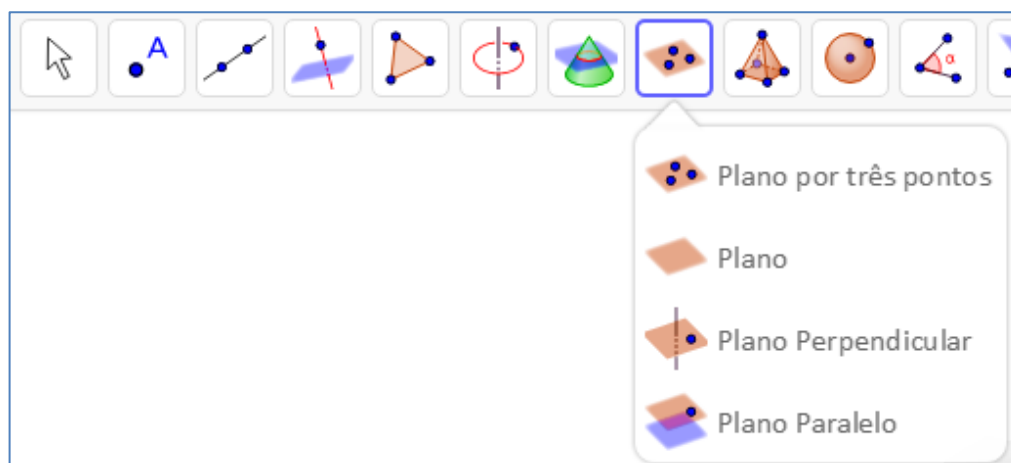
FIGURA 32: Ícone Intersecção de Duas Superfícies da Janela de Visualização 3D.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O ícone da ferramenta “h” contém opções de ferramentas para a construção de planos e planos perpendiculares e paralelos como mostra a figura a seguir.

FIGURA 33: Ícone Plano da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.

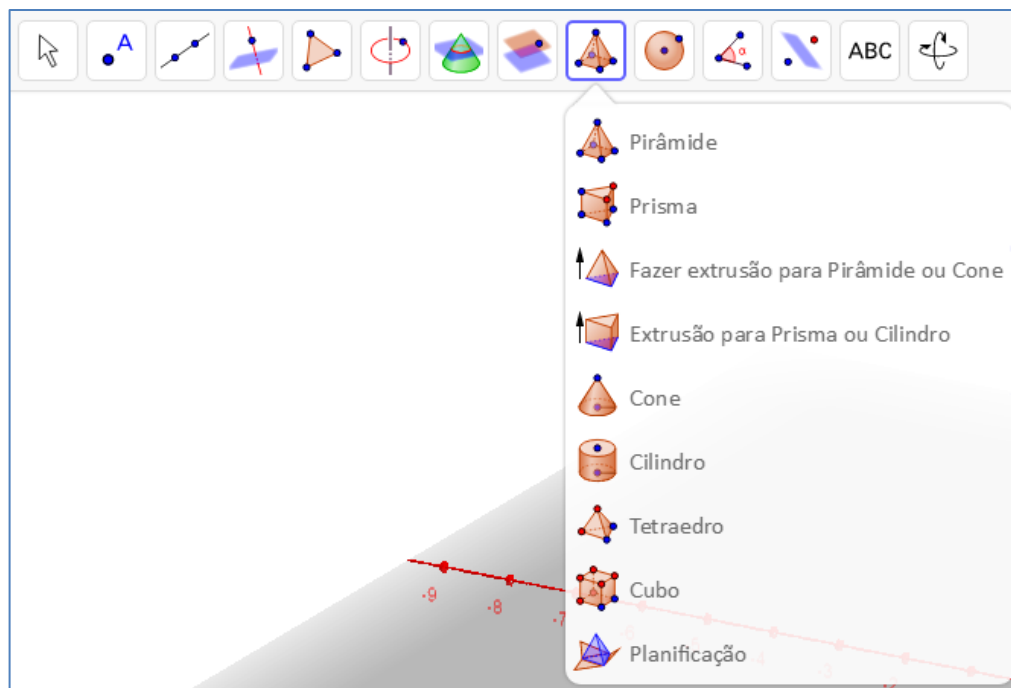


Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A ferramenta “**Plano por três pontos**” nos permite construir um plano por meio de três pontos; com a ferramenta “**Plano**” também podemos construir um plano, porém, devemos selecionar três pontos ou um ponto e uma reta ou duas retas ou um polígono pré-construído para que se construa um plano; com a ferramenta “**Plano Perpendicular**” cria-se um plano perpendicular a uma reta a partir da seleção de um ponto e uma reta e a ferramenta “**Plano Paralelo**” cria um plano paralelo a partir de um ponto e um plano.

O ícone da ferramenta “i” contém ferramentas para a construção Poliedros, Cone e Cilindro. Vide figura abaixo.

FIGURA 34: Ícone Pirâmide da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.



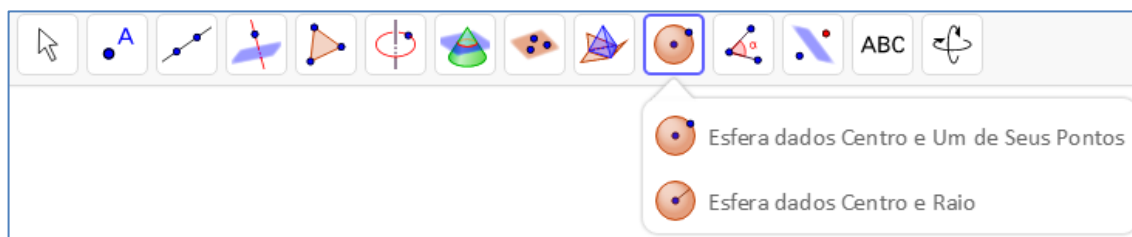
Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Com a ferramenta **“Pirâmide”** podemos criar uma pirâmide apenas desenhando um polígono, que será a base da pirâmide e, posteriormente selecionando um ponto de vértice; com a ferramenta **“Prisma”** podemos criar um prisma apenas desenhando um polígono, que será a base do prisma e, posteriormente selecionando um ponto para a base oposta; com a ferramenta **“Fazer extrusão para Pirâmide ou Cone”** podemos construir a partir de um polígono uma pirâmide reta e de um círculo um cone reto; com a ferramenta **“Extrusão para Prisma ou Cilindro”** podemos construir a partir de um polígono um prisma reto e de um círculo um cilindro reto.

Com a ferramenta **“Cone”** podemos construir um cone reto a partir do centro da base, do vértice e da escolha do raio da base; com a ferramenta **“Cilindro”** podemos construir um cilindro reto a partir do centro da base, do centro da base oposta e da escolha do raio; a ferramenta **“Tetraedro”** quando selecionada, constrói um tetraedro a partir da seleção de dois pontos da base; a ferramenta **“Cubo”** quando selecionada, assim como o tetraedro, constrói um cubo a partir da seleção de dois pontos da base e a ferramenta **“Planificação”** nos mostra a planificação a partir de um poliedro.

O ícone da ferramenta “j” contém duas ferramentas para a construção de esferas como mostra a figura seguinte.

FIGURA 35: Ícone Esfera da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.

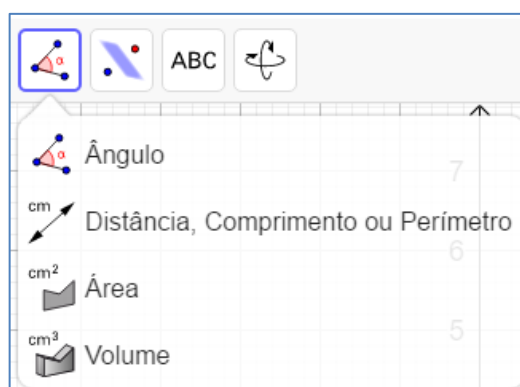


Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Com a ferramenta “**Esfera dados Centro e um de seus Pontos**” podemos construir uma esfera a partir da escolha do ponto que será seu centro e de um segundo ponto na esfera e, também, podemos criar uma esfera dados o ponto do centro e a medida do raio com a ferramenta “**Esfera dados Centro e Raio**”.

O ícone da ferramenta “k” contém ferramentas que mostram a medida de ângulo, comprimento, área e volume. Como na figura a seguir.

FIGURA 36: Ícone Ângulo da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.

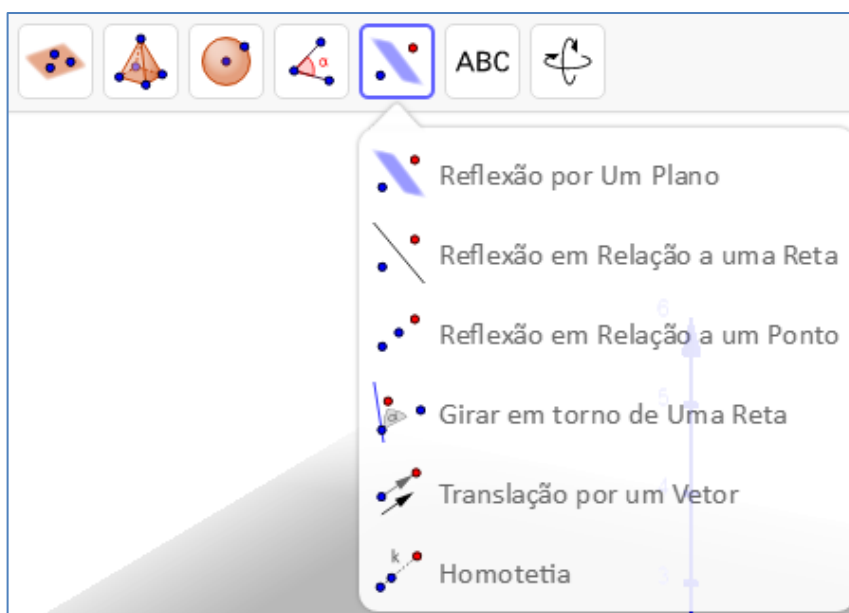


Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A novidade neste ícone de ferramentas e que corresponde aos sólidos geométricos é a ferramenta “**Volume**” que mostra o volume, automaticamente, do sólido selecionado e as demais ferramentas tem as mesmas funcionalidades da barra de ferramentas inicial.

O ícone da ferramenta “l” contém cinco ferramentas que também está na barra de ferramentas “l” da janela de visualização inicial, porém, a ferramenta “**Girar em torno de um Ponto**” na janela 3D é denominada “**Girar em torno de uma Reta**”.

FIGURA 37: Ícone Reflexão da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A ferramenta **“Reflexão por um Plano”** cria uma reflexão de um objeto por um plano selecionado.

O ícone da ferramenta **“m”** contém apenas a ferramenta **“Texto”**, que como já vimos, serve para inserir um texto na janela de visualização.

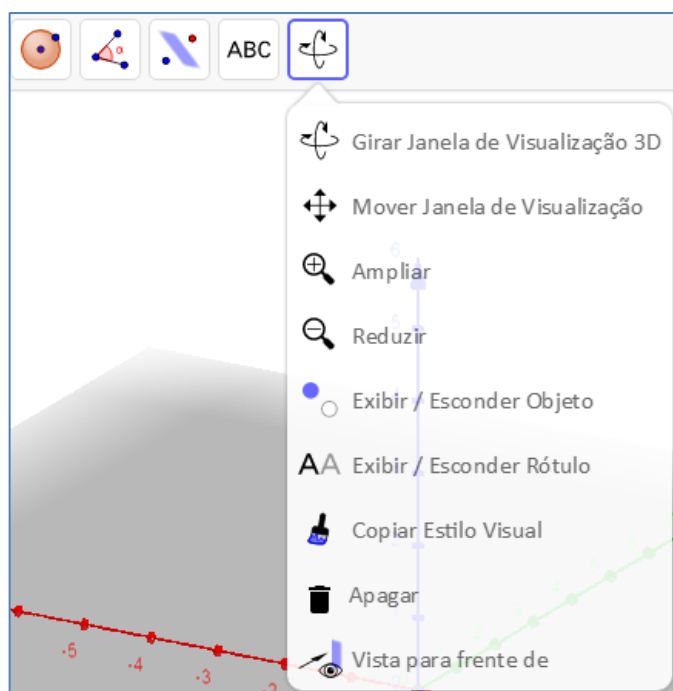
FIGURA 38: Ícone Texto da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

E o ícone da ferramenta **“n”** contém as sete ferramentas da barra de ferramentas **“K”** da janela de visualização inicial, porém, temos duas ferramentas a mais na janela 3D como vemos na imagem a seguir.

FIGURA 39: Ícone Girar da Barra de ferramentas da Janela de Visualização 3D.



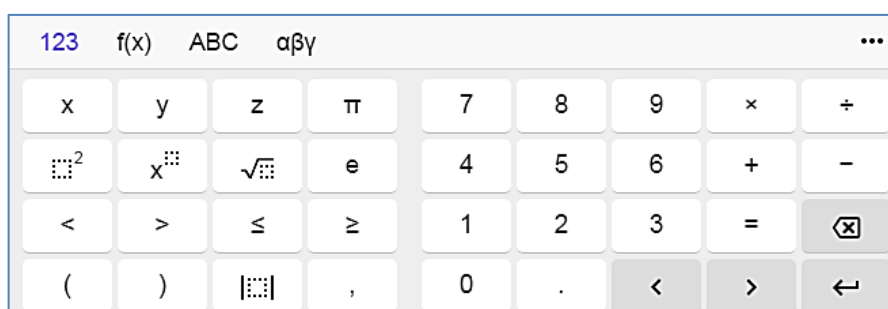
Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A ferramenta **“Girar janela de Visualização 3D”** girar e arrasta a janela 3D e a ferramenta **“Vista para a frente de”** nos mostra a frente do objeto selecionado, ou seja, muda a vista.

3.3 TECLADO ALFANUMÉRICO

O **“Teclado 1”** que é mostrado na tela inicial do GeoGebra contém números e operadores básicos para cálculo de números e construção de funções matemáticas. Vide a figura a seguir.

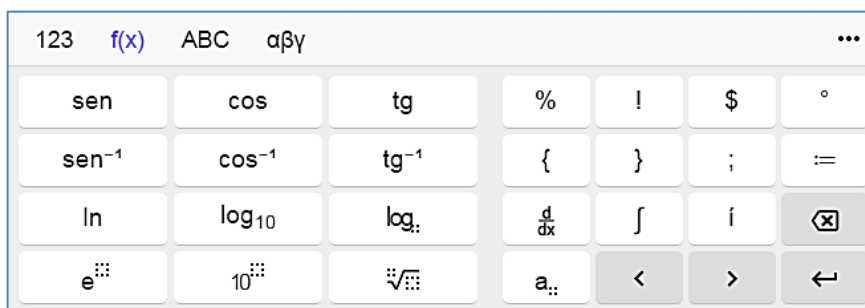
FIGURA 40: Teclado numérico básico.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O “**Teclado 2**”, quando selecionado nos traz opções para construção de funções trigonométricas, logarítmicas e exponenciais. Além de alguns operadores como podemos ver na figura a seguir.

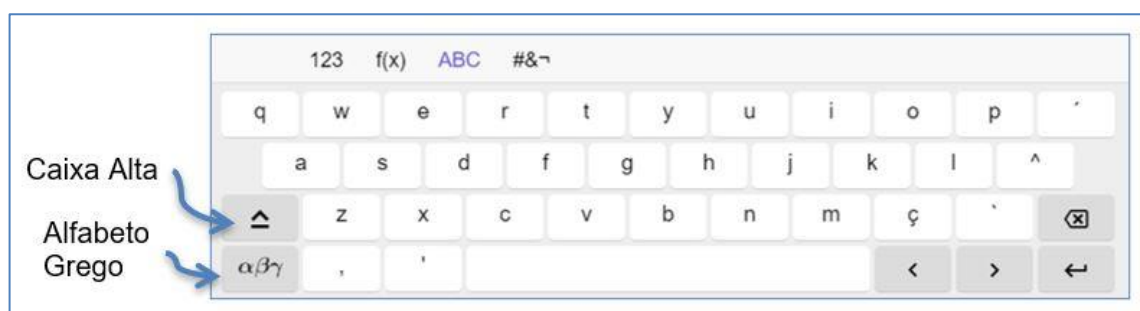
FIGURA 41: Teclado de funções.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O “**Teclado 3**” contém opções de letras do alfabeto para inserção de texto e símbolos como mostra a figura a seguir.

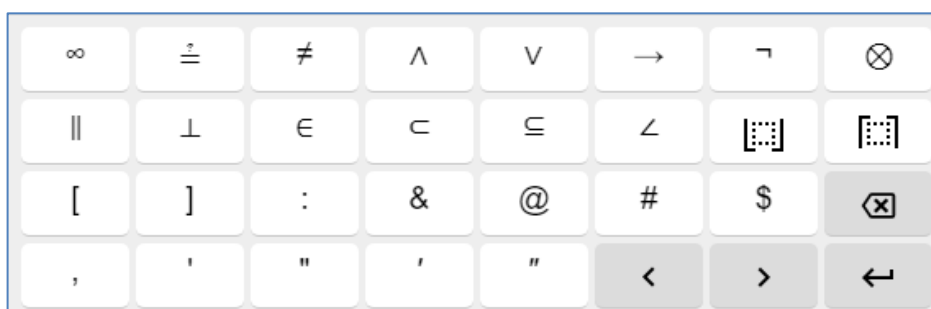
FIGURA 42: Teclado alfabético.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O “**Teclado 4**” contém letras do alfabeto grego para denominar algum plano, função, ângulo etc.

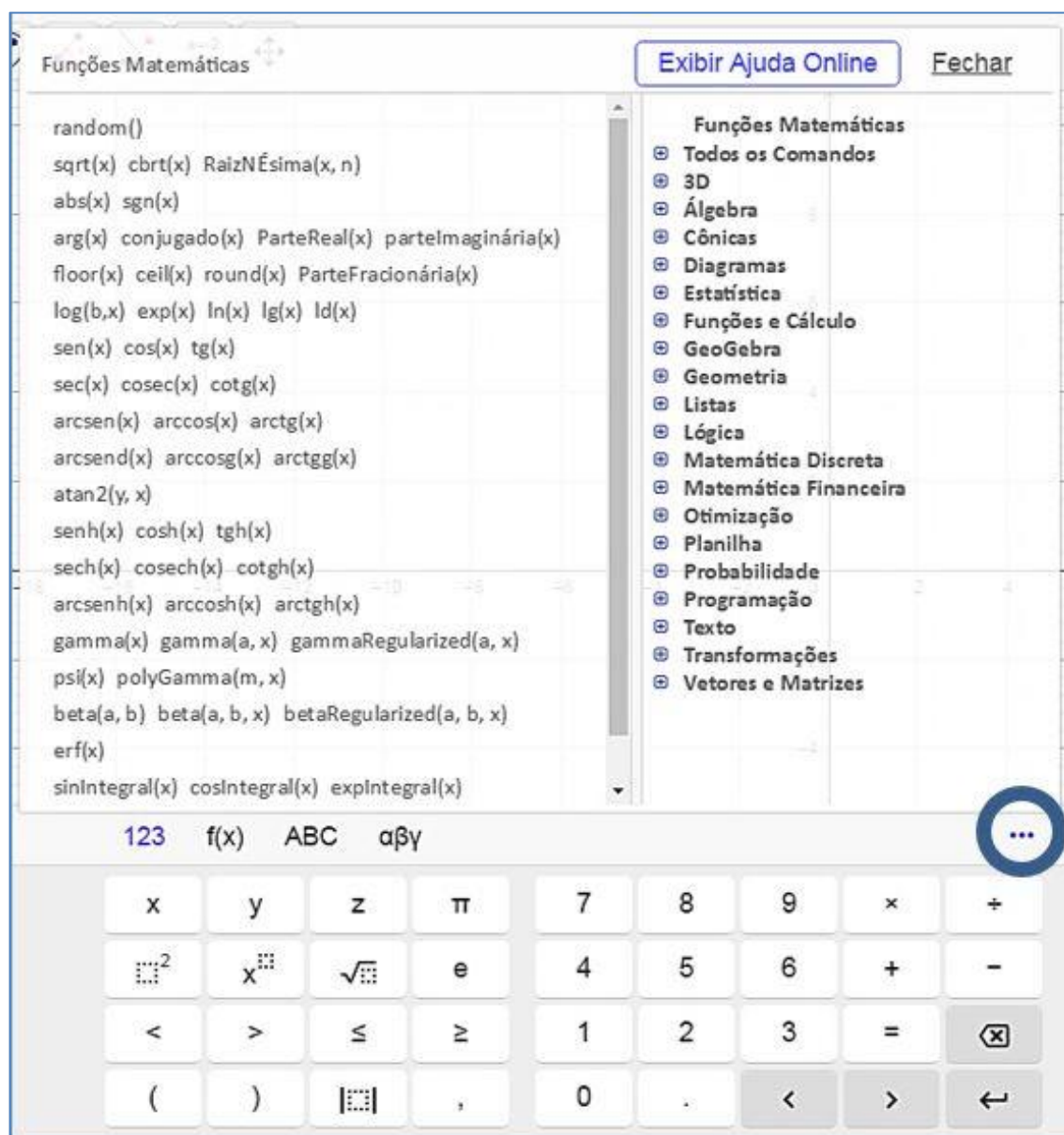
FIGURA 43: Teclado de Símbolos e operadores.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Além disso, podemos recorrer à ajuda sobre Funções Matemáticas gerais e escritas de Funções Matemática que se encontra no ícone localizado no teclado alfanumérico, como mostrado na figura a seguir:

FIGURA 44: Menu de Ajuda de Comandos.



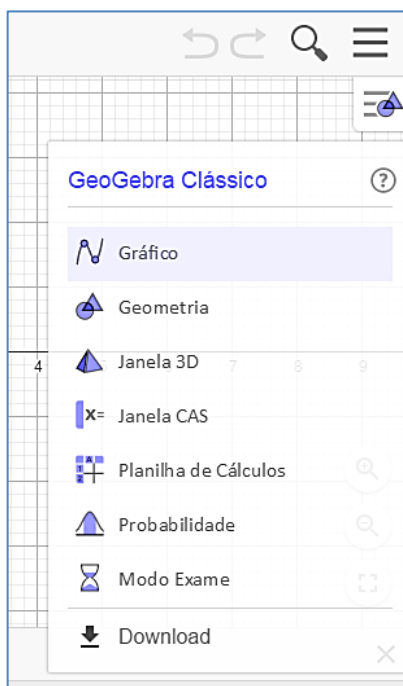
Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O Teclado Alfanumérico é uma novidade nesta versão do GeoGebra, porém, se o usuário optar por usar o teclado do PC ou Notebook não há restrições, pois o Teclado Alfanumérico do GeoGebra serve como auxílio, principalmente, para os aplicativos voltados para celulares.

3.4 BARRA DE SELEÇÃO DIRETA DAS JANELAS

A Barra de Seleção direta de Janelas é exibida somente ao iniciar o GeoGebra e tem as opções de abrir janelas, como vemos na figura a seguir.

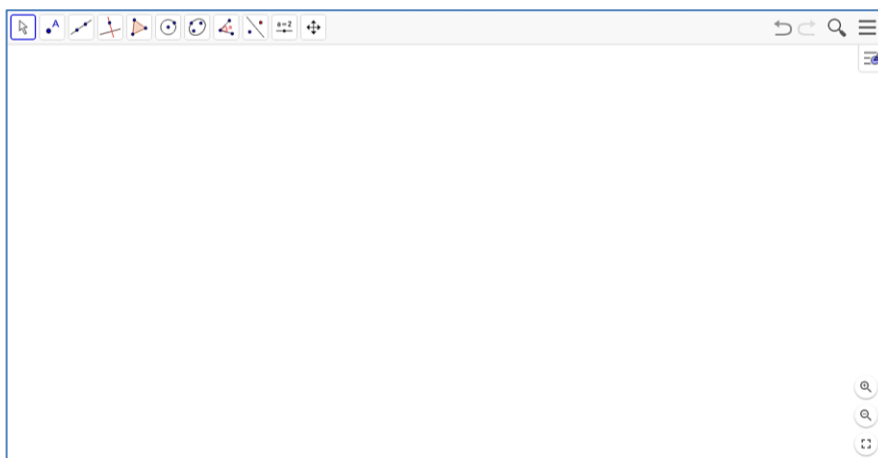
FIGURA 45: Seleção direta de janelas.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A opção **“Gráfico”** já está na janela inicial, pois se trata da Janela de Álgebra, ou seja, não muda as janelas iniciais e a opção **“Geometria”** abre uma janela de visualização em branco como na figura a seguir.

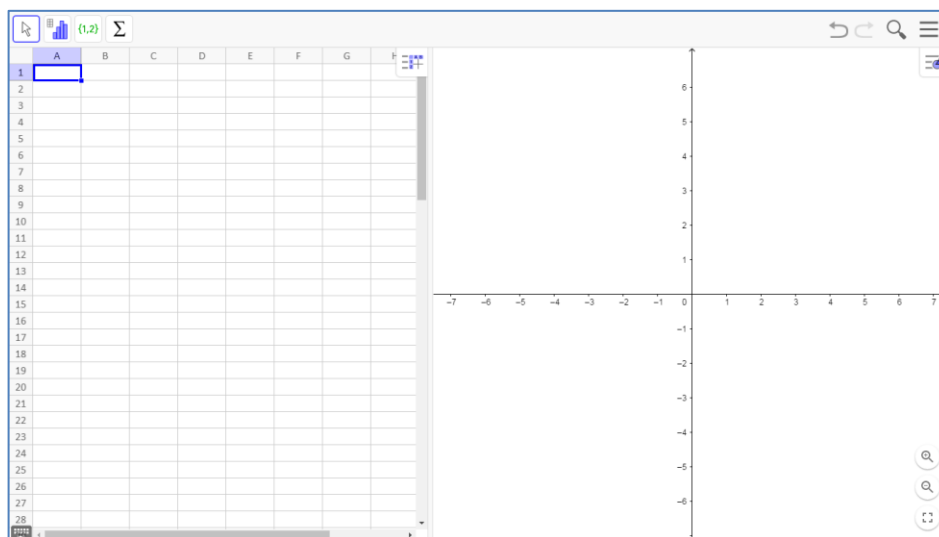
FIGURA 46: Janela de Geometria.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A opção “**Janela 3D**” substitui a Janela de Visualização inicial, mostrando assim, somente a Janela de Álgebra e Janela 3D; a opção “**Janela CAS**” abre a Janela CAS e a Janela de Visualização 2; a opção “**Planilha de Cálculos**” abre a Planilha de Cálculos e a Janela de Visualização 2 como mostra a figura a seguir.

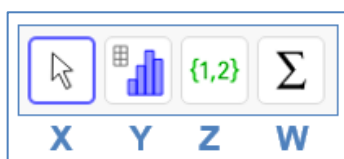
FIGURA 47: Planilha de Cálculos.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A Janela da “**Planilha de Cálculos**” mostra a seguinte barra de ferramentas:

FIGURA 48: Ícones de Ferramentas da Planilha de cálculos.

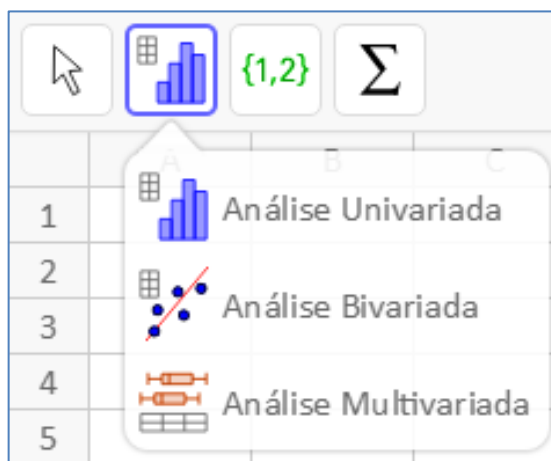


Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A ferramenta “**X**” contém apenas a opção de selecionar um objeto da planilha. Ao selecionar o ícone de ferramentas “**Y**” temos as ferramentas: “**Análise Univariada**” que faz uma análise dos valores numéricos em um bloco de células e constrói automaticamente um Diagrama de barras, que pode ser alterado para Histograma ou Boxplot, além disso, a janela do gráfico de barras traz algumas opções de visualização; com a ferramenta “**Análise Bivariada**” ao selecionar pares de valores em um bloco de células constrói-se um Modelo de Regressão (Scatterplot ou Diagrama de resíduos) com algumas opções de visualização e com a ferramenta

“**Análise Multivariada**” ao selecionar dois ou mais blocos de colunas cria-se blocos de estatística com resultados de Média, Mediana, Máximos e Mínimos.

FIGURA 49: Ícone Análise da Planilha de cálculos.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O ícone da ferramenta “**Z**” contém ferramentas muito úteis para o estudo de sequências e matrizes. Com a ferramenta “**Lista**” cria uma lista de pontos criados na planilha, selecionando-se por linha ou coluna; com a ferramenta “**Lista de Pontos**” faz o mesmo que a ferramenta Lista, porém, já fixa seus pontos na janela de visualização; com a ferramenta “**Matriz**” cria uma matriz a partir das células selecionadas na planilha; com a ferramenta “**Tabela**” podemos criar uma tabela que será apresentada na janela de visualização e a ferramenta “**Caminho por Polígonos**” cria um caminho poligonal pelos pontos selecionados nas células da planilha.

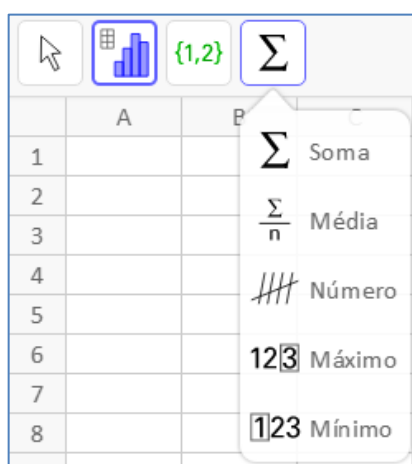
FIGURA 50: Ícone Lista da Planilha de cálculos.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O ícone de ferramentas “W” contém algumas ferramentas de contagem. Com a ferramenta “**Soma**” podemos calcular a soma automática das linhas ou colunas das células selecionadas; com a ferramenta “**Média**” podemos calcular a média aritmética das linhas ou colunas das células selecionadas; com a ferramenta “**Número**” ao selecionar linhas ou colunas se mostrará a quantidade de elementos selecionados; com a ferramenta “**Máximo**” mostra-se o valor máximo entre as células selecionadas e com a ferramenta “**Mínimo**” apresenta-se o valor mínimo entre as células selecionadas.

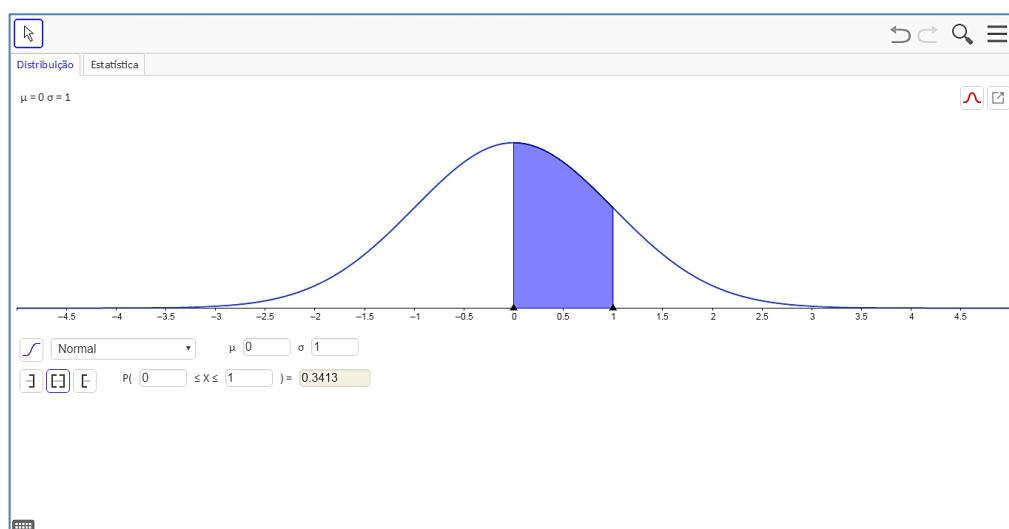
FIGURA 51: Ícone Soma da Planilha de cálculos.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

A opção “**Probabilidade**” abre apenas a Janela de probabilidade como vemos na figura a seguir.

FIGURA 52: Janela da Calculadora de Probabilidades.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

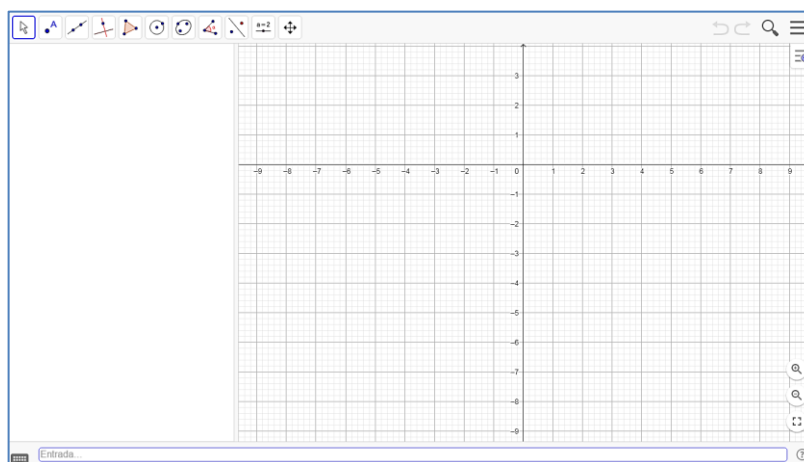
E a opção “**Modo Exame**” é outra novidade nesta versão, pois ela serve para fazer um histórico da atividade feita no GeoGebra e a opção “**Download**” abre uma segunda janela do GeoGebra para baixar aplicativos.

3.5 BARRA DE MENU

A Barra de Menu traz opções de acesso como: **Arquivo**, traz opções com relação ao arquivo construído (novo, abrir, gravar, exportar imagem, compartilhar, baixar e visualizar Impressão); **Editar**, traz opções de edição do arquivo que está sendo construído (desfazer, refazer, selecionar tudo, opções de configuração, copiar e colar); **Disposições**, Mostra todas as janelas disponíveis e, se selecionada, abrir-se-á somente a janela selecionada (Gráficos, Janela CAS, Geometria, Janela 3D, Planilha de Cálculos, Probabilidade e Modo Exame); **Exibir**, traz as opções de exibição contidas nas “Disposições” numa mesma área de trabalho, podendo exibir todos ao mesmo tempo, além dessas disposições podem ser incluídas: Janela de Visualização 2, Protocolo de Construção, Campo de Entrada, Atualizar Janelas e Recalcular todos os Objetos.

O “**Campo de Entrada**” localizado na opção “**Exibir**” da Barra de Menu tem como finalidade e entrada de funções e comandos, como mostrado na figura a seguir. E todos os comandos estão descritos no “Menu de Ajuda sobre Funções Matemáticas” da figura anterior.

FIGURA 53: Campo de Entrada com Menu de Ajuda sobre Funções Matemáticas.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Na mesma Barra de Menu contém, também, opções de **Configuração**, que podem ser de Álgebra, básicos ou global; opções de **Ferramentas**, onde podemos configurar, criar e gerenciar ferramentas; opções de **Ajuda**, com tutoriais, manual, fórum, reportar erro e informações sobre a licença e a opção **Entrar** serve para que o usuário entre na comunidade GeoGebra e possa compartilhar seu arquivo pronto, como jogo, sequência didática etc.

3.6 TAREFAS PROPOSTAS COM AUXÍLIO DO GEOGEBRA

As tarefas descritas que seguem foram elaboradas para que o estudante comece a se familiarizar com as equações polinomiais de 2º grau e com o GeoGebra. Estas tarefas poderão servir de apoio para o desenvolvimento do objeto de conhecimento pelo professor e, que se aplicadas com seus estudantes possibilitará o desenvolvimento da habilidade pretendida.

O objeto de conhecimento das cinco sequências de tarefas será a “Equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ ”. E busca desenvolver a habilidade de código EF08MA09: Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

São cinco sequências de tarefas que o professor, conforme a adoção de uma metodologia, poderá aplicar em sala de aula com seus estudantes. Isso possibilitará aos estudantes o desenvolvimento da habilidade EF08MA09. No Apêndice F contém algumas resoluções como sugestão para tarefas que compõem a sequências de tarefas.

3.6.1 Primeira Sequência de Tarefas

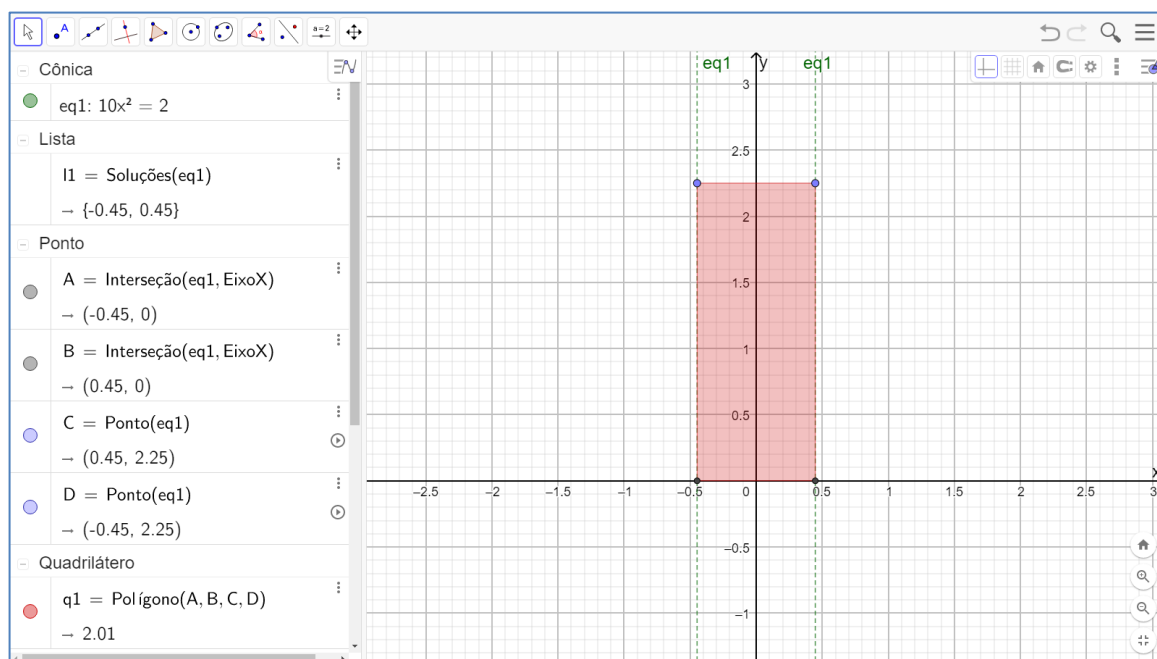
O objeto de conhecimento abordado será a equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$, do qual o estudante desenvolverá a habilidade (EF08MA09): Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$. O objetivo de aprendizagem será resolver equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ no GeoGebra, dados os conteúdos de conhecimento prévio: equações, área do retângulo, área do quadrado e operações algébricas.

Esta primeira Sequência de Tarefas está composta por 6 tarefas e suas respectivas resoluções. As resoluções realizadas no GeoGebra são sugestivas e podem sofrer mudanças conforme os objetivos estabelecidos pelo professor.

TAREFA 1. Uma colcha com 10 retalhos quadrangulares idênticos possui uma superfície de 2 m^2 . Qual é a medida do lado de cada retalho?

Resolução: A partir da leitura do problema, o que se pede é a medida do lado de um dos 10 retalhos. Utilizando a janela 2D do GeoGebra podemos desenhar um retângulo utilizando o ícone . Basta abrir a janela de visualização 2D do GeoGebra e, utilizando apenas a Malha da janela, o estudante deve fazer um retângulo com 10 quadrados.

FIGURA 54: Colcha de retalhos em forma retangular no GeoGebra.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Portanto, como a colcha possui 10 retalhos quadrangulares que tem áreas iguais a x^2 e a sua área total é de 2 m^2 , teremos:

$$10x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{10} \Rightarrow x^2 = \sqrt{\frac{2}{10}} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{10}}$$

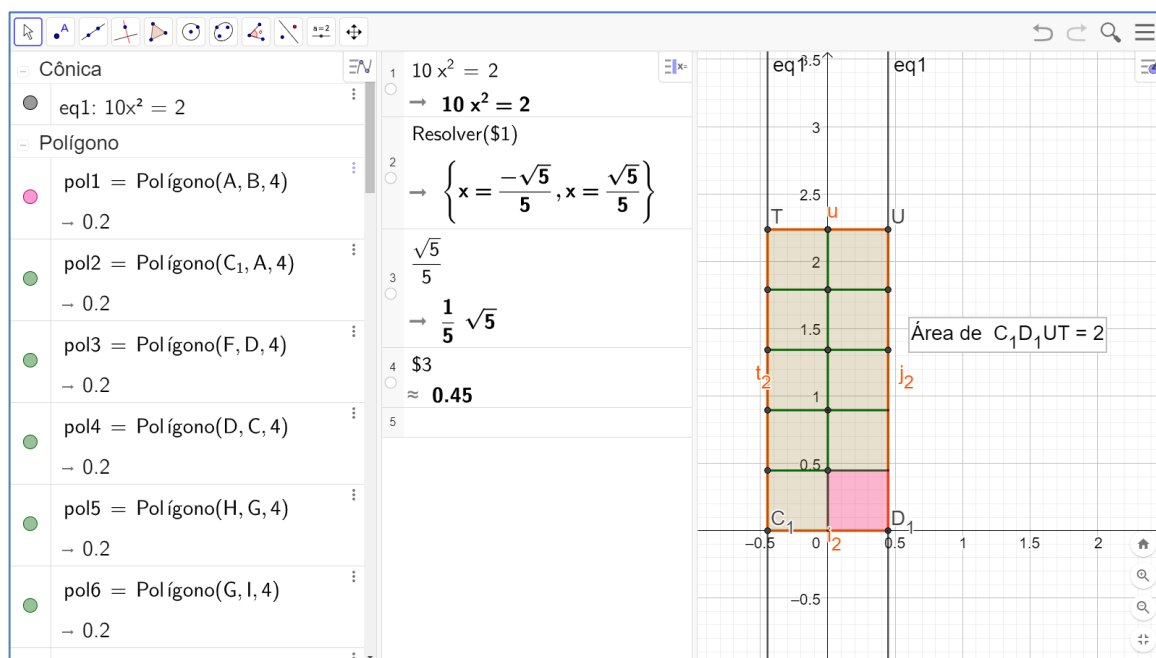
Neste caso, ao fazer a divisão de 2 por 10 não facilitará os cálculos e, neste caso, teríamos $\sqrt{\frac{2}{10}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$ seguindo a generalização, resultando na estratégia para

encontrar as raízes quadradas de 2 e 10. Por outro lado, as raízes $x = \sqrt{0,2}$ ou $x = -\sqrt{0,2}$ também são aceitas, porém, o lado do retalho quadrangular é igual a $\sqrt{0,2} \text{ m} \approx 0,45 \text{ m} = 45 \text{ cm}$.

Este cálculo é facilmente resolvido no GeoGebra ao inserir a equação $10x^2 = 2$ no campo de entrada e utilizar o comando “Resolver(< Equação >)” ou “Soluções(< Equação >)”. E, também é possível trabalhar o redimensionamento da figura retangular, com o cálculo da raiz $\sqrt{0,2}$ e com o sistema de medidas de comprimento para a verificação do resultado.

Outra maneira de resolver o problema, seria utilizando as janelas de álgebra, CAS e de visualização 2D. E, utilizando apenas o comando “Resolver” na janela CAS obtém-se o resultado ou introduzindo o modelo matemático na janela de álgebra, em que, de forma automática, aparecem as retas na janela 2D, o que possibilita aos estudantes a verificação por meio dos comandos “Polinômio” e “Área” o resultado.

FIGURA 55: Colcha de retalhos em três janelas do GeoGebra.



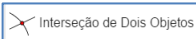
Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Com relação a mudança de cores dos objetos inseridos na janela 2D, ficam a critério do professor ou da exigência da tarefa.

TAREFA 2. Um tapete possui uma área quadrada de 5 m^2 . Qual é a medida aproximada do lado deste tapete?

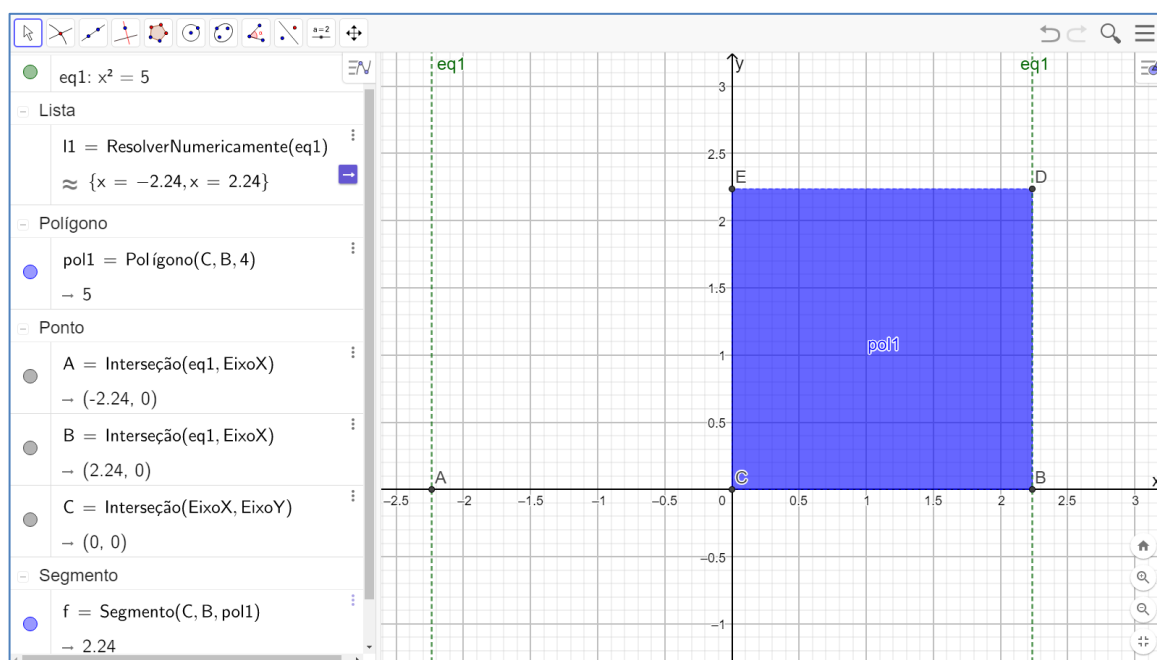
Resolução: A partir da leitura do problema, o que se pede é a medida do lado de um quadrado cuja área é de 5 m^2 . Assim, calculamos as raízes da mesma maneira e, podendo utilizar os comandos “Resolver(< Equação >)” ou “Soluções(< Equação >)” ou “ResolverNumericamente(< Equação >)”. Desse modo, ao realizar os cálculos considerando x^2 a área do tapete, teremos:

$$x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \Rightarrow x = \sqrt{5} \text{ ou } x = -\sqrt{5}$$

Aproximando o valor da raiz positiva, temos que o lado do tapete mede 2,24 m. Uma maneira de verificar o resultado é inserindo a equação $x^2 = 5$ no campo de entrada, posteriormente, digitar o comando `ResolverNumericamente(< Equação >)` e selecionar o ícone  para fazer a interseção entre as retas “eq1”, que são paralelas ao “EixoY”, com o “EixoX” gerando os pontos de interseção “A” e “B”.

Utilizando, ainda, a janela 2D podemos desenhar um quadrado utilizando o ícone , escolhendo o ponto de origem, ponto “C”, e um dos dois pontos gerados pela interseção na janela 2D e, posteriormente, escolher a quantidade de vértices do polígono e clicar em “Ok”. Assim, verificaremos por meio dos dados na janela de álgebra que o polígono tem área 5 e o seguimento (lado do quadrado) tem comprimento 2,24.

FIGURA 56: Resolução com o comando “ResolverNumericamente” a equação.



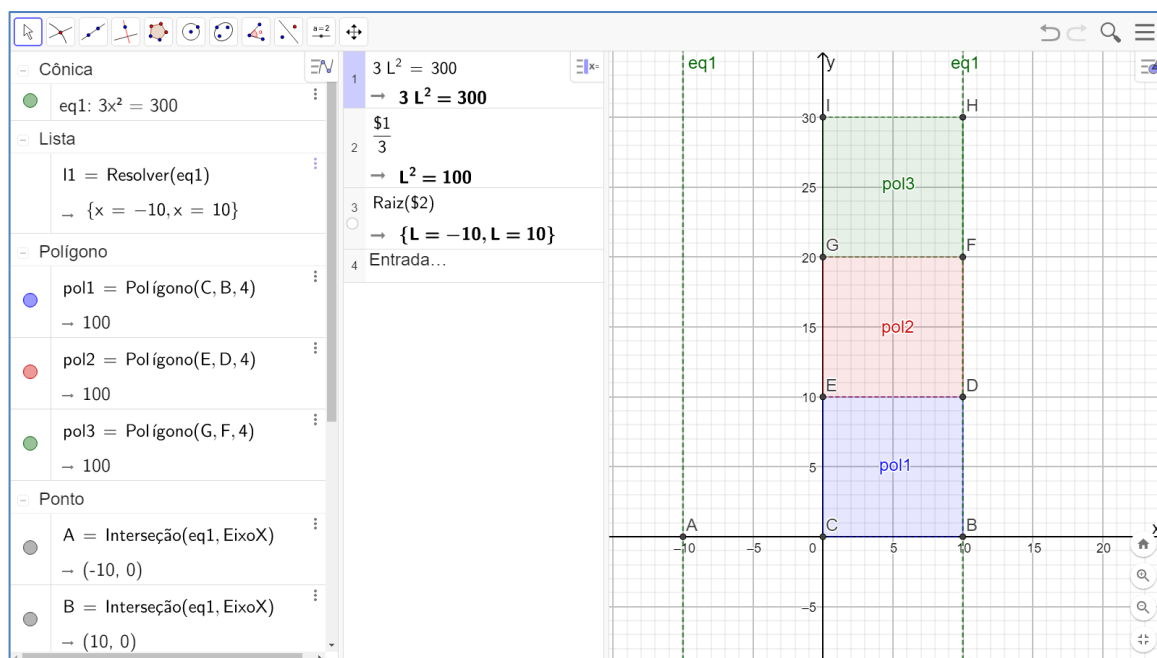
TAREFA 3. Numa fazenda há 3 celeiros quadrados de mesma área para guardar arroz, feijão e trigo, ocupando uma área total de 300 m^2 . Qual é a medida do lado do celeiro destinada para o armazenamento do arroz?

Resolução: Pela leitura do problema, como são 3 áreas de quadrados iguais e a soma dessas áreas é 300 m^2 , então temos de resolver a equação $3L^2 = 300$. Para resolver os cálculos e encontrar o valor de L , basta utilizar alguns passos na janela CAS e realizar os seguintes cálculos:

$$3L^2 = 300 \Rightarrow L^2 = \frac{300}{3} \Rightarrow L^2 = 100 \Rightarrow L = \pm\sqrt{100} \Rightarrow L = \pm 10$$

Assim, basta abrir a janela CAS, inserir a equação $3L^2 = 300$ na linha 1 e apertar a tecla Enter. Na linha 2, ao digitar $\$1/3$ teremos uma simplificação da equação e por fim poderemos utilizar o comando $\text{Raiz}(< \text{Polinômio} >)$, em que, o polinômio será a equação resultante na linha 2, lembrando sempre de apertar a tecla Enter ao final de cada processo.

FIGURA 57: Resolução com o comando “Raíz” na janela CAS do GeoGebra.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

O símbolo de cifrão \$ fixa os dados da linha desejada. para esta tarefa poderíamos ter pulado o passo feito na linha 2 e fazer logo após a entrada da equação na linha 1 o comando $\text{Raiz}(< \text{Polinômio} >)$. Portanto, a medida do lado do celeiro de arroz é igual a 10 m, pois, L não pode ser um valor negativo.

TAREFA 4. Um quadrado de lado L possui determinada área. Ao adicionar dois metros no lado desse quadrado, sua área é de 121 m^2 . Qual é a área do quadrado de lado L ?

Resolução:

Se L é o lado do quadrado, então temos:

$$(L + 2)^2 = 121 \Leftrightarrow (L + 2)^2 = 11^2$$

$$L + 2 = 11 \text{ ou } L + 2 = -11$$

$$L = 9 \text{ ou } L = -13$$

Novamente temos o lado do quadrado como um valor positivo, então o lado é 9. A área do quadrado é $L^2 = 9^2 = 81$.

TAREFA 5. Um terreno tinha um formato quadrangular com 40 m de lado. O dono do terreno precisa fazer uma alteração para que ele passe a ter apenas 1200 m^2 de área. Para isso, achou viável reduzir a largura e aumentar o comprimento no mesmo valor. Observe o esquema que foi feito para atender o que se queria:

- Escreva uma equação que represente a situação descrita.
- Utilizando a propriedade distributiva, desenvolva a equação.
- É possível encontrar uma equação equivalente a essa na forma $x^2 = b$, onde b é um número real?
- Quais são os possíveis valores para x ?

Resolução:

- Escreva uma equação que represente a situação descrita.

$$(40 - x)(40 + x) = 1200$$

- Utilizando a propriedade distributiva, desenvolva a equação.

$$(40 - x)(40 + x) = 1200$$

$$1600 + 40x - 40x - x^2 = 1200$$

$$1600 - x^2 = 1200$$

- É possível encontrar uma equação equivalente a essa na forma $x^2 = b$, onde b é um número real?

$$1600 - x^2 = 1200$$

$$1600 - 1200 = x^2$$

$$400 = x^2$$

Onde $a = 1$ e $b = 400$

d) Quais são os possíveis valores para x ?

$$x^2 = 400$$

$$x = \sqrt{400} \text{ ou } x = -\sqrt{400}$$

$$x = 20 \text{ ou } x = -20$$

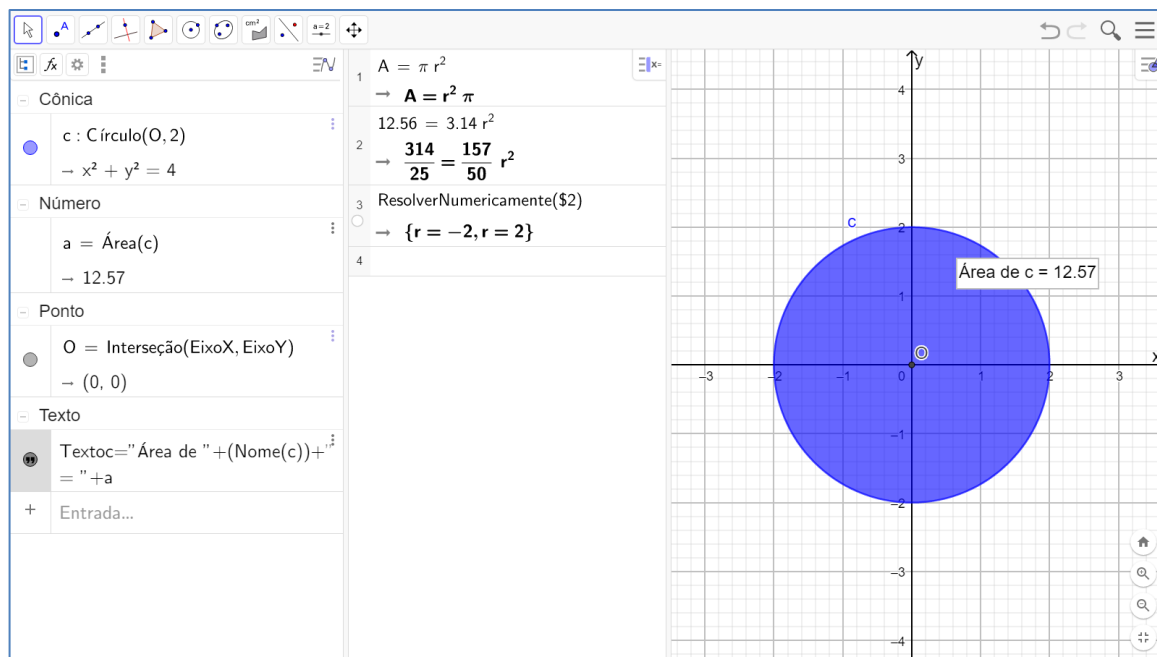
Podemos interpretar o valor negativo como indo na direção oposta. Desta forma, teríamos uma solução em que obteríamos um retângulo horizontal quando $x = 20$ e um retângulo vertical quando $x = -20$.

TAREFA 6. A área de um círculo é de $12,56 \text{ cm}^2$. Encontre o raio desse círculo considerando $\pi = 3,14$.

Resolução: A área do círculo é dada por $A_c = \pi \cdot r^2$, em que $A_c = 12,56$, $\pi = 3,14$ e r é o raio, cujo valor deverá ser encontrado. Portanto, ao fazer as substituições na expressão $A_c = \pi \cdot r^2$, temos:

$$\begin{aligned} \pi \cdot r^2 &= 12,56 \Rightarrow 3,14 \cdot r^2 = 12,56 \Rightarrow \\ \Rightarrow r^2 &= \frac{12,56}{3,14} \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2 \text{ cm ou } r = -2 \text{ cm} \end{aligned}$$

Como o raio é uma medida positiva, então esse círculo possui um raio de 2 cm. Estes cálculos são facilmente realizados no GeoGebra e, para tanto, basta inserir a equação e substituir os valores aproximados da área e do π (pi), dados no problema. Ao resolver utilizando o comando ResolverNumericamente(< Equação >) teremos os valores para r , porém, é considerado apenas o valor positivo $r = 2$.

FIGURA 58: Cálculo algébrico da área do círculo no GeoGebra.

Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Para verificar a resposta, deve-se selecionando o ícone círculo dados centro e raio  e escolhendo-se o raio igual a 2 será criado um círculo de raio 2 na janela 2D. E, para calcular a área do círculo utilizamos o ícone  e clicamos em cima do círculo, do qual, queremos calcular a área. A área será apresentada em forma de texto ao lado do objeto escolhido.

Percebe-se pela resolução com auxílio do GeoGebra que o cálculo algébrico envolvendo conceitos e figuras geométricas podem e devem ser trabalhadas em sala de aula. Assim, o professor pode colocar à disposição dos seus alunos as possibilidades para o desenvolvimento das habilidades sobre o cálculo algébrico relacionado à geometria plana.

3.6.2 Segunda Sequência de Tarefas

O objeto de conhecimento abordado será a equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$, do qual o estudante desenvolverá a habilidade (EF08MA09): Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$. O objetivo de aprendizagem será resolver equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ no GeoGebra, dados

os conteúdos de conhecimento prévio: equações, área do quadrado, contagem e operações algébricas.

Esta primeira Sequência de Tarefas está composta por 5 tarefas e suas respectivas resoluções. As resoluções realizadas no GeoGebra são sugestivas e podem sofrer mudanças conforme os objetivos estabelecidos pelo professor.

TAREFA 1. Perceba o seguinte padrão em relação aos números ímpares:

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

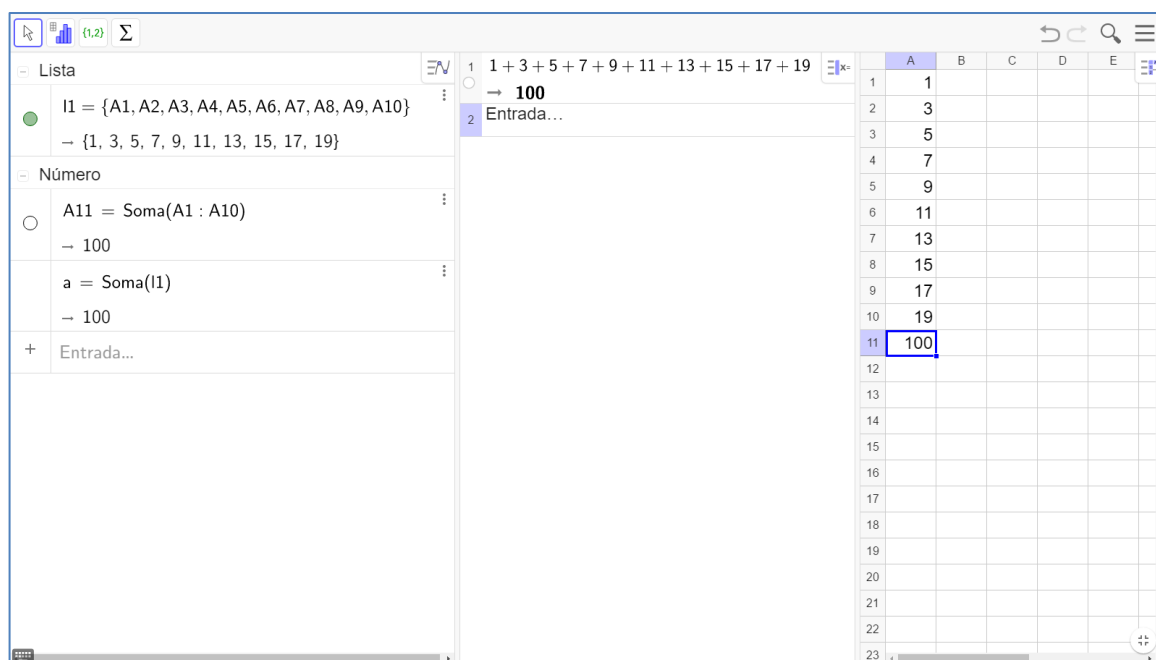
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

Qual será a soma dos dez primeiros números ímpares?

Resolução: Na leitura do problema, os estudantes deverão perceber que a soma dos números ímpares consecutivos sempre gera um número quadrado perfeito. A soma dos dois primeiros números ímpares será 2^2 , a soma dos três primeiros números ímpares será 3^2 , a soma dos quatro primeiros números ímpares será 4^2 . Portanto, seguindo este raciocínio, a soma dos dez primeiros números ímpares será 10^2 que igual a 100.

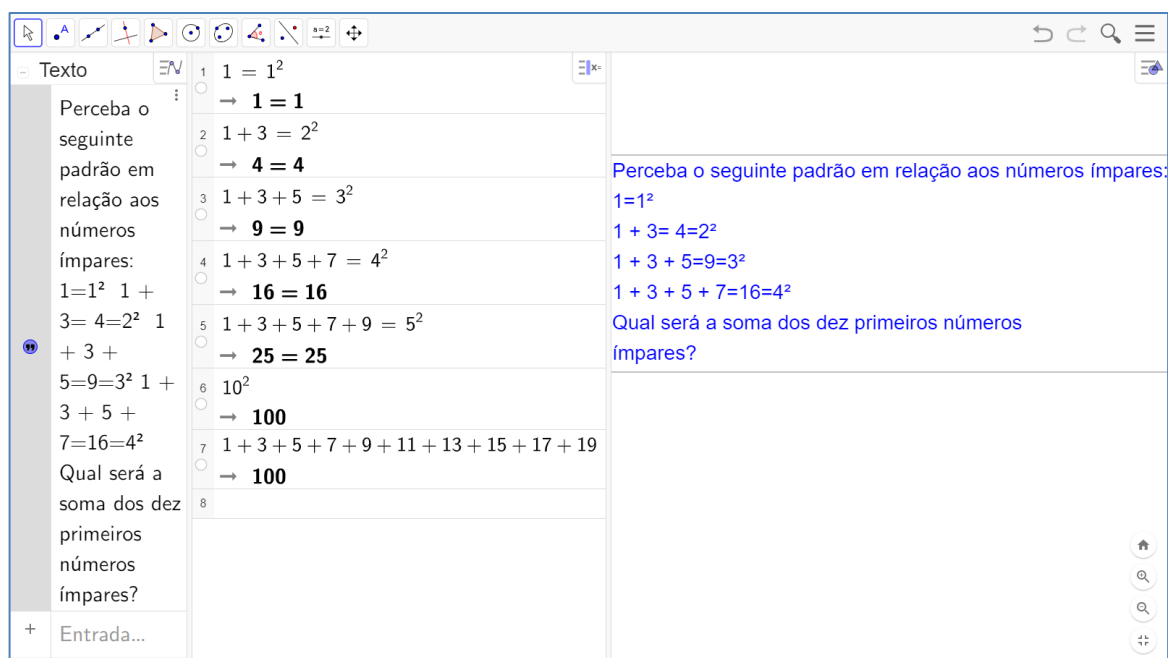
Há algumas ferramentas no GeoGebra que podem ser utilizadas. Na janela CAS, o estudante pode continuar a sequência de números ímpares, somando-os como numa calculadora. Uma maneira que exige um pouco mais de habilidade seria digitar todos os 10 primeiros números ímpares na Planilha, criar uma lista de números e, posteriormente, utilizar o comando Soma(< lista >) como na figura, ou o ícone  que fará a soma apenas na planilha.

FIGURA 59: Comando “Soma” e criação de lista com planilha no GeoGebra.

Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Para criar uma lista de números basta selecionar a coluna ou linha de números na planilha, dar um click no botão direito do mouse, ir em Criar e depois selecionar Lista, ou o ícone  que criará uma lista com os números selecionados na planilha. A lista aparecerá na janela de álgebra.

Outra maneira dos estudantes resolverem o mesmo problema seria realizando os cálculos diretamente na janela CAS em sequência até encontrar o valor procurado. O professor também pode fazer com que os estudantes percebam a regularidade que aparece nas somas.

FIGURA 60: Cálculo direto na janela CAS do GeoGebra.

Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Dessa forma, o professor pode trabalhar a leitura de recorrências e até mesmo potenciação e cálculos envolvendo números ímpares, para então, chegar a uma generalização dos cálculos fazendo com que os estudantes percebam e desenvolvam o pensamento algébrico.

TAREFA 2. Três caminhões irão transportar 108 mesas quadradas com 1 metro de lado. Todos eles sairão com sua capacidade máxima, sem colocar nenhuma mesa em cima da outra. Sabendo que as caçambas de cada caminhão são iguais e possuem a mesma medida em cada dimensão, qual a altura das caçambas?

Resolução:

$$3x^2 = 108 \Leftrightarrow x^2 = \frac{108}{3} \Leftrightarrow x^2 = 36$$

$$x = \sqrt{36} \text{ ou } x = -\sqrt{36}$$

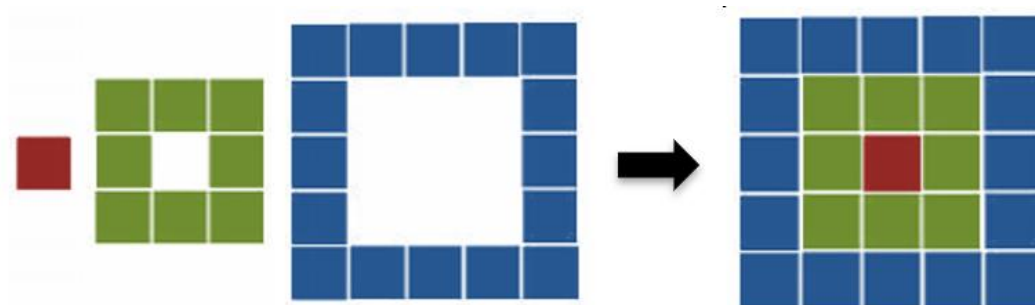
$$x = 6 \text{ ou } x = -6$$

Como x só pode ser a medida da altura, só pode ser o valor positivo.

TAREFA 3. Usando pastilhas de cerâmica na forma de quadradinhos, foi composta uma decoração numa parede em três peças, sendo uma peça vermelha

com 1 quadrado, uma peça verde com 9 quadrados e uma peça azul com 16 quadrados, como mostrado na figura a seguir.

FIGURA 61: Pastilhas de cerâmica quadradas.



Fonte: Adaptado de Nova Escola – Planos de aula (2018)

Sabendo que no total foram empregadas 121 pastilhas em toda a decoração, quantas pastilhas foram utilizadas na última peça?

Resolução: Veja que se encaixarmos as peças menores nas peças maiores obteremos um quadrado maior teremos 25 pastilhas tendo em cada lado 5 pastilhas. Repare também, que os lados seguem uma sequência numérica ímpar (1, 3, 5, ...).

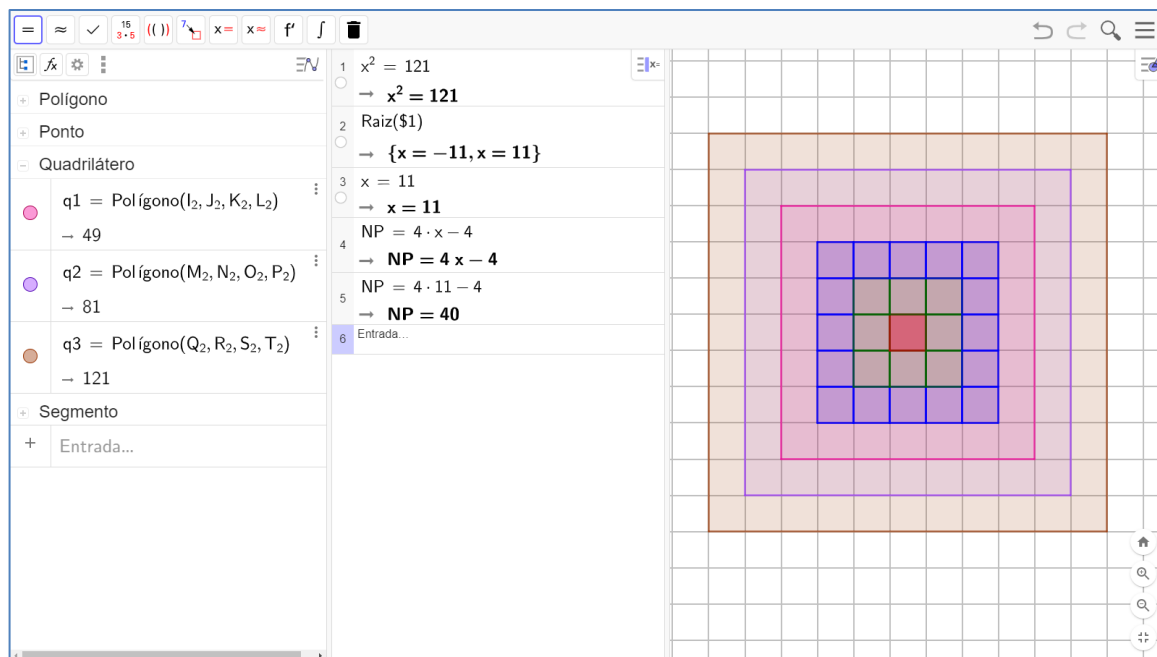
Seja x o número de pastilhas que compõem o lado desse quadrado maior, que também será o lado do quadrado que forma a última peça, então temos que:

$$x^2 = 121 \Rightarrow x = \pm\sqrt{121} \Rightarrow x = \pm 11$$

Agora, perceba que o número de pastilhas utilizadas nessa última peça pode ser escrito como quatro vezes o número de peças que forma os lados, mas assim contaremos as quatro quinas duas vezes, portanto, se x é o número de pastilhas que compõe o lado do quadrado, então temos que o número de pastilhas que forma a última peça é $N_p = 4x - 4$ (N_p é o número de pastilhas), que nesse caso será $N_p = 4 \cdot 11 - 4 = 40$. Assim, teremos 40 pastilhas na última peça.

Ao utilizar o GeoGebra na resolução deste problema, tanto para a resolução algébrica quanto para verificação geométrica, as janelas CAS e 2D são suficientes. Primeiro calculamos as raízes e depois como chegamos à expressão $N_p = 4x - 4$.

FIGURA 62: Pastilhas de cerâmica quadradas no GeoGebra.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

TAREFA 4. Resolva o problema a seguir utilizando palavras, uma representação gráfica e uma representação algébrica: “Para construir 3 paredes quadradas do seu banheiro, Karina precisou de 27 azulejos de 1 m^2 cada um. Qual é a medida da altura do banheiro de Karina?”

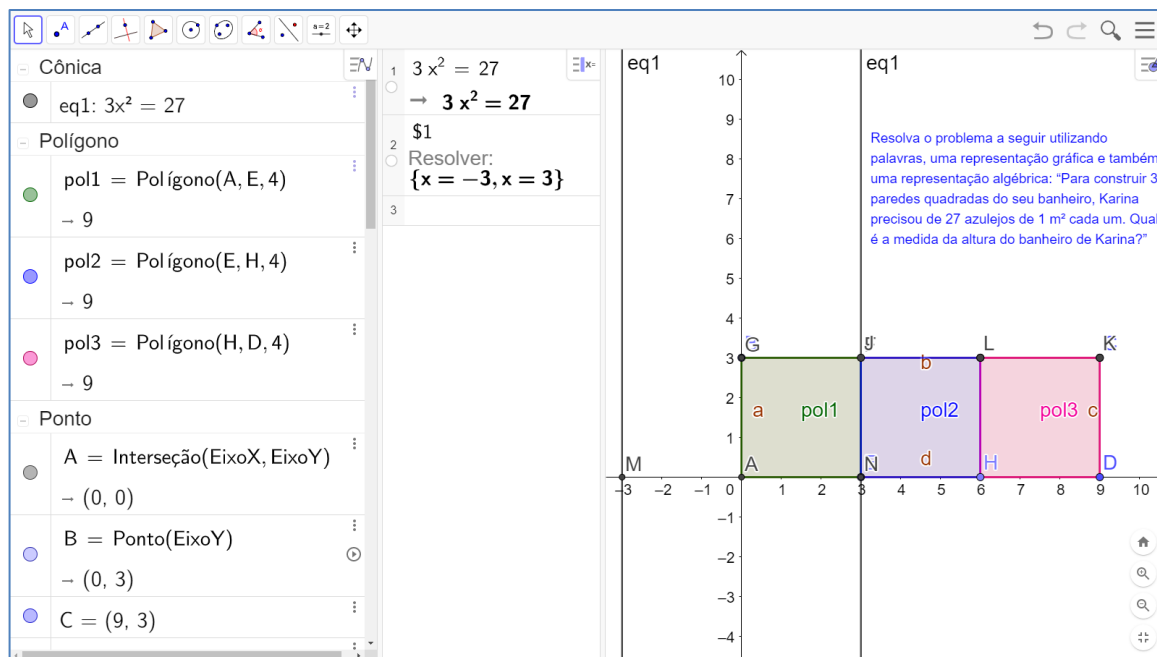
Resolução:

$$3x^2 = 27 \Leftrightarrow x^2 = \frac{27}{3} \Leftrightarrow x^2 = 9$$

$$x = \sqrt{9} \text{ ou } x = -\sqrt{9}$$

$$x = 3 \text{ ou } x = -3$$

A resolução do problema pode ser feita de forma rápida utilizando apenas a janelas CAS, porém, para completar as demais etapas da ASPM é necessário utilizar as janelas de álgebra e 2D.

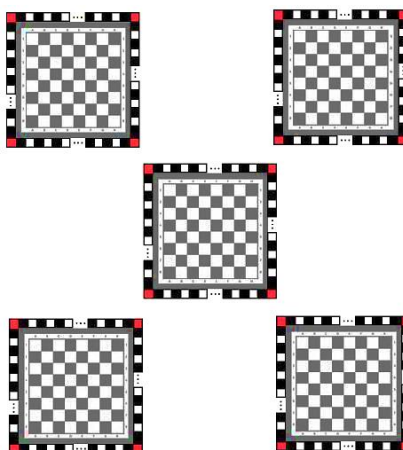
FIGURA 63: Resolução da medida da moldura do banheiro no GeoGebra.

Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Como se trata de uma situação do cotidiano, a resposta não pode ser um número negativo. Por isso, a resposta seria 3 m.

TAREFA 5. Em uma praça o prefeito decidiu colocar pequenos ladrilhos para contornar as 5 mesas de xadrez. Sabendo que as 5 mesas ocupam, no total, uma área de 1250 cm^2 , quantos centímetros de ladrilho ele precisará?

Resolução: Primeiro faça um esboço da situação para compreender melhor o que está sendo falado no problema.

FIGURA 64: Ladrilhos nos tabuleiros de xadrez.

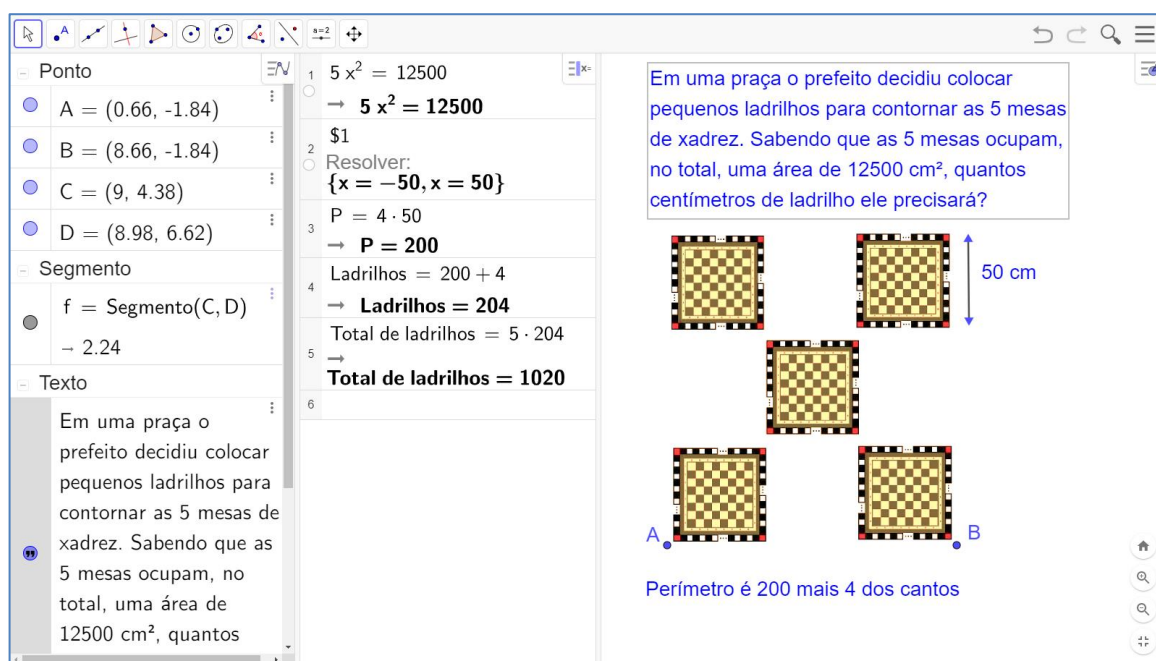
Fonte: Nova Escola – Planos de aula (2018)

Observe que os quadriculados em volta são apenas os ladrilhos que serão colocados para o enfeite. Vale ressaltar que isto é apenas um esboço e, por isso, não está condizente com a realidade. O desenho está fora de escala.

Para resolver essa questão precisamos notar que quando formos cobrir cada tabuleiro, será necessário calcular o lado de cada um deles. Entretanto, como vamos colocar ladrilhos nesta figura, os cantos não estariam sendo medidos. Neste caso, ao final seria necessário adicionar 4 ladrilhos (que vão se posicionar nos cantos) para contornar totalmente o tabuleiro.

Ainda não sabemos o lado de cada tabuleiro, porém, podemos considerar que essa medida seja igual a alguma letra de sua escolha. No nosso caso, optamos por L como sendo esse valor.

FIGURA 65: Resolução do problema do tabuleiro de xadrez no GeoGebra.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Desta forma, temos que a área de cada tabuleiro pode ser determinada por L^2 . Sabendo disso, as 5 mesas de tabuleiros totalizam $5L^2$. Com isso podemos escrever a equação da seguinte maneira: $5L^2 = 12500$

Resolvendo esta equação, temos:

$$5L^2 = 12500 \Leftrightarrow L^2 = \frac{12500}{5} \Leftrightarrow L^2 = 2500$$

Se a área de cada um dos tabuleiros é igual a 2500, devemos procurar um número positivo que elevado ao quadrado seja igual a 2500. Este número só pode ser o 50. Isto significa que o lado de cada um dos tabuleiros é igual a 50 cm.

A partir daí, chegamos à conclusão de que o perímetro de cada tabuleiro é igual a 4×5 , ou seja, 200 cm. Por isso, teríamos que colocar, em cada tabuleiro, 200 ladrilhos mais os 4 ladrilhos dos cantos, ou seja, 204 ladrilhos. Como são 5 mesas de tabuleiro, serão necessários $5 \times 204 = 1020$ ladrilhos no total.

Nesta sequência de tarefas, percebe-se algumas semelhanças entre cada uma das tarefas que a compõe, apesar disso, necessitam de mais ações e operações para que alunos consigam resolver o problema. Configurando, assim, maior complexidade se comparada à primeira sequência de tarefas.

3.6.3 Terceira Sequência de Tarefas

O objeto de conhecimento abordado será a equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$, do qual o estudante desenvolverá a habilidade (EF08MA09): Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$. O objetivo de aprendizagem será resolver equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ no GeoGebra, dados os conteúdos de conhecimento prévio: equações, pensamento algébrico e operações algébricas.

Esta primeira Sequência de Tarefas está composta por 6 tarefas e suas respectivas resoluções. As resoluções realizadas no GeoGebra são sugestivas e podem sofrer mudanças conforme os objetivos estabelecidos pelo professor.

TAREFA 1. André não querendo revelar a sua idade para os colegas, disse: “A minha idade é um número que estou pensando agora e, o triplo do quadrado desse número é 588. Logo, a minha idade é esse número!” Qual a idade de André?

Resolução: A idade de André é 14, pois

$$3x^2 = 588 \Leftrightarrow x^2 = \frac{588}{3} \Leftrightarrow x^2 = 196$$

$$x = \sqrt{196} \text{ ou } x = -\sqrt{196}$$

$$x = 14 \text{ ou } x = -14$$

TAREFA 2. Pensei em um número que o dobro do seu quadrado é igual a 32. Qual pode ser esse número? Será que só tem esse? Pense em todas as possibilidades.

Resolução: Os possíveis valores para este número são 4 ou -4 , pois:

$$2x^2 = 32 \Leftrightarrow x^2 = \frac{32}{2} \Leftrightarrow x^2 = 16$$

$$x = \sqrt{16} \text{ ou } x = -\sqrt{16}$$

$$x = 4 \text{ ou } x = -4$$

TAREFA 3. O quádruplo de um número ao quadrado é igual a 16. Quais são os possíveis valores para esse número?

Resolução: Os possíveis valores para esse número são 2 e -2 , pois:

$$4x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{4} \Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$x = \sqrt{4} \text{ ou } x = -\sqrt{4}$$

$$x = 2 \text{ ou } x = -2$$

TAREFA 4. O triplo de um número real elevado ao quadrado é igual a 432. Sabendo que a soma dele com 21 é igual a 9, qual é esse número?

Resolução:

$$3x^2 = 432 \Leftrightarrow x^2 = \frac{432}{3} \Leftrightarrow x^2 = 144$$

$$x = \sqrt{144} \text{ ou } x = -\sqrt{144}$$

$$x = 12 \text{ ou } x = -12$$

Como a solução procurada adicionada com 21 resulta em 9, temos que o resultado só pode ser o número -12 .

TAREFA 5. Escolhi um número, elevei ao quadrado e multipliquei o resultado por 4. O resultado que encontrei foi 9. Quais são os possíveis valores para esse número?

Resolução: Resposta: $\frac{3}{2}$ ou $-\frac{3}{2}$

$$4x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{9}{4}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{2}$$

Todas as cinco tarefas propostas nesta sequência de tarefas podem ser desenvolvidas com os alunos na janela CAS do GeoGebra. São problemas que exigem dos estudantes todas as etapas da ASPM, desenvolvendo assim, o pensamento algébrico.

3.6.4 Quarta Sequência de Tarefas

O objeto de conhecimento abordado será a equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$, do qual o estudante desenvolverá a habilidade (EF08MA09): Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$. O objetivo de aprendizagem será resolver equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ no GeoGebra, dados os conteúdos de conhecimento prévio: equações, pensamento algébrico, conjuntos numéricos, contagem e operações algébricas.

Esta primeira Sequência de Tarefas está composta por 6 tarefas e suas respectivas resoluções. As resoluções realizadas no GeoGebra são sugestivas e podem sofrer mudanças conforme os objetivos estabelecidos pelo professor.

TAREFA 1. Considere os conjuntos $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{0,1,2\}$ e a equação $ax^2 = b$. Se o coeficiente a for um número do conjunto A e o coeficiente b for um número do conjunto B , escreva todas as equações $ax^2 = b$ possíveis se $b < a$, obtendo suas respectivas respostas.

Resolução: Como $b < a$ temos os casos $b = 0$ e $a = 1, 2$ ou 3 , $b = 1$ e $a = 2$ ou 3 e $b = 2$ e $a = 3$. Logo, teremos as seguintes situações:

i. $1 \cdot x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

ii. $2 \cdot x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

iii. $3 \cdot x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$$\text{iv.} \quad 2 \cdot x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

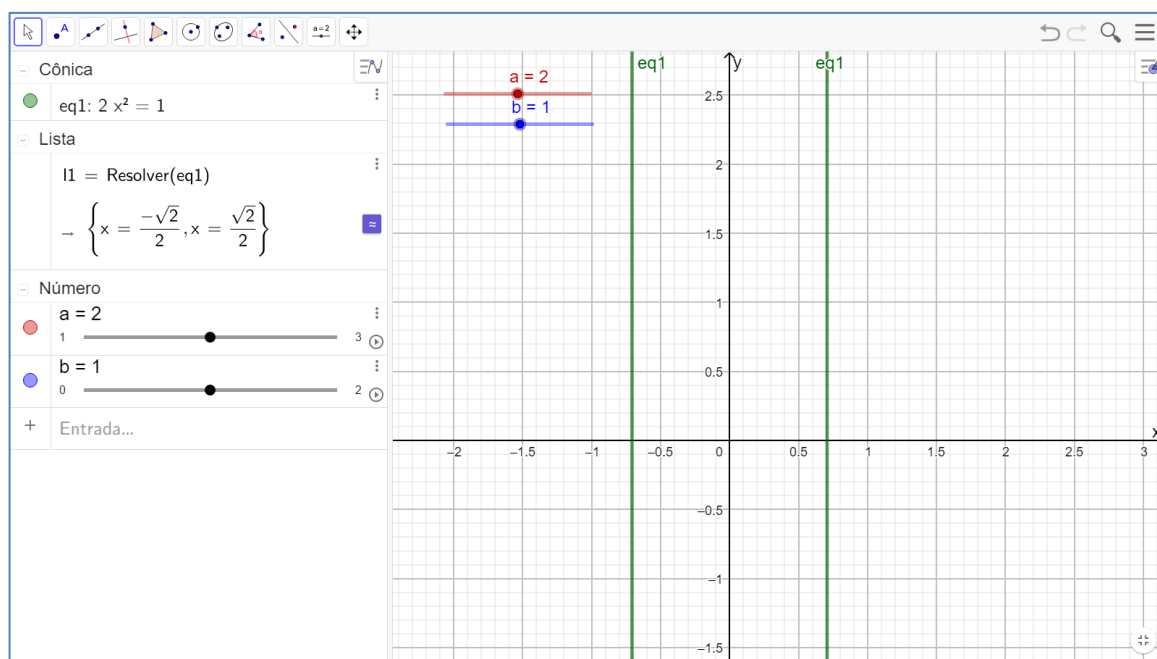
$$\text{v.} \quad 3 \cdot x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\text{vi.} \quad 3 \cdot x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Uma forma interessante de resolver este problema utilizando o GeoGebra é criando dois controles deslizantes para a e b da equação. Para tanto, basta selecionar o ícone Controle deslizante, em que, se abrirá uma janela para a escolha do valor mínimo, máximo e do incremento para o controle deslizante a e, ao clicar na janela 2D, será apresentado o controle a na janela de álgebra automaticamente. Repete-se o processo para b.

Com os controles deslizantes criados, em seguida basta digitar a equação $ax^2 = b$ e apertar Enter. A equação apresentada tomará como valores de a e b os selecionados no controle deslizante. Por fim, basta inserir o comando Resolver(<Equação >) no campo de entrada da janela de álgebra.

FIGURA 66: Controle deslizante na equação.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Na figura 61, o controle em vermelho ($a = 2$) e o controle em azul ($b = 1$) resultam na equação (iv) e as retas da equação na cor verde cortam o eixo x justamente nas raízes da equação.

TAREFA 2. Discuta todas as possíveis soluções, de todos os casos de uma equação na forma $a \cdot x^2 = b$, caso os cartões sorteados para substituir os valores de a e b contenham os números 1 e 3.

Resolução:

Caso 1:

$$1x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1} \text{ ou } x = -\sqrt{1}$$

$$x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Caso 2:

$$3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{3} \Leftrightarrow x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1} \text{ ou } x = -\sqrt{1}$$

$$x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Caso 3:

$$1x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$$

Caso 4:

$$3x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ou } x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Racionalizando (opcional neste momento)

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

TAREFA 3. Considere que você possui três cartões na mesa, um com o número zero, outro com o número -1 e outro com o número 1 . Sorteamos um cartão para ser o valor de a , recolocamos o cartão na mesa, e sorteamos um cartão para ser o valor de b . Agora na equação $ax^2 = b$, escreva todas as possíveis equações com todos os possíveis desfechos.

Resolução: Poderemos ter: $1 \cdot x^2 = 1$, $1 \cdot x^2 = 0$, $1 \cdot x^2 = -1$, $0 \cdot x^2 = 1$, $0 \cdot x^2 = 0$, $0 \cdot x^2 = -1$, $-1 \cdot x^2 = 1$, $-1 \cdot x^2 = 0$ e $-1 \cdot x^2 = -1$

Alguns casos são equivalentes, como o $1 \cdot x^2 = -1$ e $-1 \cdot x^2 = 1$, e o $1 \cdot x^2 = 1$ e $-1 \cdot x^2 = -1$. Os casos $-1 \cdot x^2 = 0$ e $1 \cdot x^2 = 0$ são equivalentes também assim como o $0 \cdot x^2 = 1$ e $0 \cdot x^2 = -1$

$$1 \cdot x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

$$1 \cdot x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$0 \cdot x^2 = 1$ não possui solução

$0 \cdot x^2 = 0$ possui infinitas soluções. Pense em um número qualquer, coloque ele ao quadrado e multiplique por zero. A resposta é sempre zero!

TAREFA 4. Sorteie dois dos cartões contendo os números 0 , -2 e 8 . Determine qual será o número que elevado ao quadrado e multiplicado pelo número do primeiro cartão será igual ao segundo cartão.

Resolução:

Caso 1:

$$8x^2 = 0$$

$$-2x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{0}{8}$$

$$x^2 = \frac{0}{-2}$$

$$x^2 = 0$$

$$x^2 = 0$$

Caso 2:

$$-2x^2 = 8$$

$$8x^2 = -2$$

$$x^2 = \frac{8}{-2}$$

$$x^2 = \frac{-2}{8}$$

$$x^2 = -4$$

$$x^2 = -\frac{1}{4}$$

Caso 3:

$$0x^2 = 8$$

$$0x^2 = -2$$

$$0 = 8$$

$$0 = -2$$

TAREFA 5. Considere um número que:

a) Ao somar uma unidade, elevar ao quadrado e multiplicar por 3 o resultado, obtemos 108;

b) Ao subtrair uma unidade, elevar ao quadrado e multiplicar por 2 o resultado, obtemos 128. Qual é esse número?

Resolução: Item (a)

Seja x esse número, então temos:

$$3(x + 1)^2 = 108 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = \frac{108}{3} \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 36 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 6^2$$

$$x + 1 = 6 \text{ ou } x + 1 = -6$$

$$x = 5 \text{ ou } x = -7$$

Resolução: Item (b)

$$2(x - 1)^2 = 128 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 64$$

$$x - 1 = 8 \text{ ou } x - 1 = -8$$

$$x = 9 \text{ ou } x = -7$$

O número é -7 .

TAREFA 6. Em cada um dos cartões tem números naturais. Sorteie um dos cartões. Esse primeiro cartão que você sorteou será o número que será colocado no lugar do “a” na equação $ax^2 = b$. Coloque o cartão de volta e faça outro sorteio. O segundo número sorteado deverá ser colocado no lugar do “b”. Quais são os possíveis valores de x , se nos cartões aparecerem os números 4 e 9? Discuta todas as possibilidades.

Resolução:

Caso 1:

$$9x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{9} \Leftrightarrow x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1} \text{ ou } x = -\sqrt{1}$$

$$x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Caso 2:

$$4x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{4} \Leftrightarrow x^2 = 1$$

$$x = \sqrt{1} \text{ ou } x = -\sqrt{1}$$

$$x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Caso 3:

$$9x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{9}$$

$$x = \sqrt{\frac{4}{9}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$x = \frac{2}{3} \text{ ou } x = -\frac{2}{3}$$

Caso 4:

$$4x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{9}{4}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{2}$$

As cinco tarefas propostas nesta sequência de tarefas podem ser desenvolvidas com os alunos na janela CAS e controles deslizantes do GeoGebra. São problemas que exigem alguns conhecimentos prévios dos estudantes para que possam fazer a leitura correta (ler e interpretar) das tarefas.

3.6.5 Quinta Sequência de Tarefas

O objeto de conhecimento abordado será a equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$, do qual o estudante desenvolverá a habilidade (EF08MA09): Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$. O objetivo de aprendizagem será resolver equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ no GeoGebra, dados os conteúdos de conhecimento prévio: equações, geometria plana, geometria espacial, pensamento algébrico e operações algébricas.

Esta primeira Sequência de Tarefas está composta por 6 tarefas e suas respectivas resoluções. As resoluções realizadas no GeoGebra são sugestivas e podem sofrer mudanças conforme os objetivos estabelecidos pelo professor.

TAREFA 1. Determine, utilizando o GeoGebra, o lado de um quadrado que é face de um cubo que possui superfície total medindo 150 cm^2 .

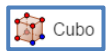
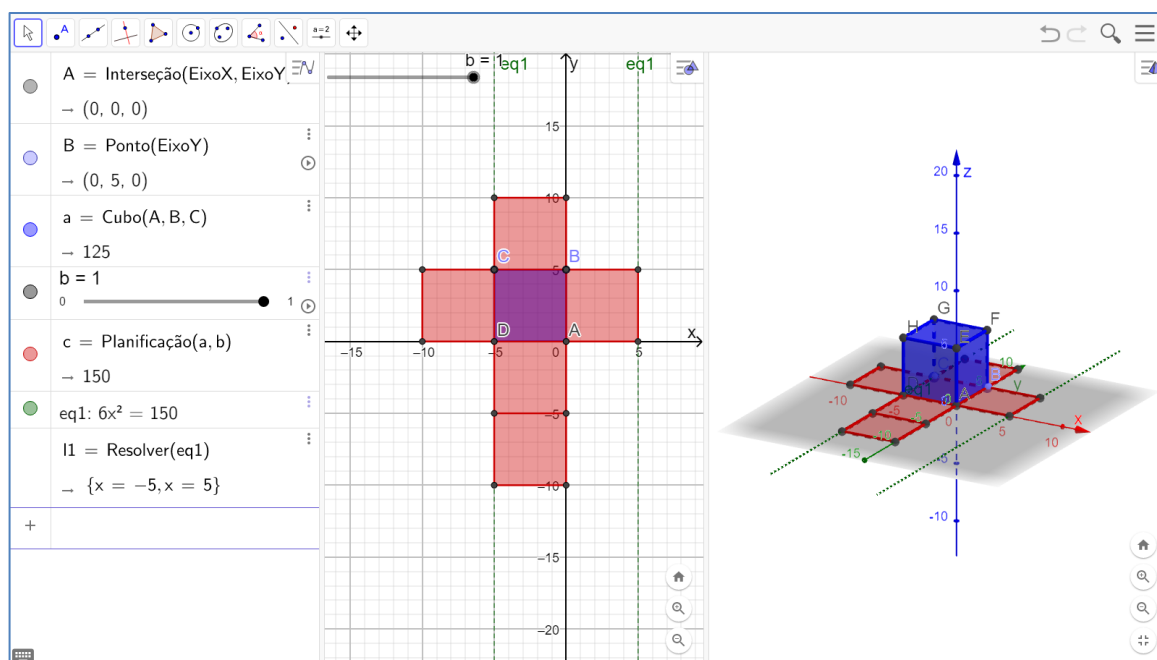
Resolução: A partir da leitura do problema, o que se pede é apenas a medida do lado de uma das 6 faces do cubo. Utilizando a janela 3D do GeoGebra podemos desenhar o cubo utilizando poucos ícones. Basta abrir a janela de visualização 3D do GeoGebra, abrir as opções no ícone  e, em seguida selecionar  e selecione dois pontos no gráfico da “janela 3D” e logo seguida no ícone pirâmide selecione  o que resultará na planificação do cubo que também pode ser visualizada na janela 2D.

FIGURA 67: Planificação do cubo.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Portanto, como o cubo possui 6 faces, em que, cada face possui área igual a x^2 e a área total dessas faces é de 150 cm^2 , teremos:

$$6x^2 = 150 \Rightarrow x^2 = \frac{150}{6} \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{25}$$

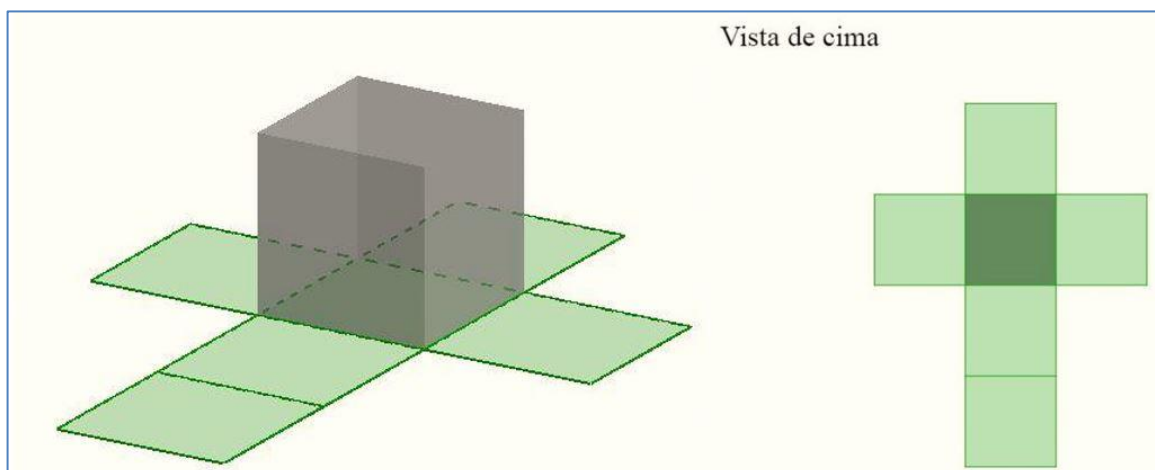
Neste caso, ao fazer a divisão de 150 por 6 facilitará os cálculos, caso contrário, teríamos $\sqrt{\frac{150}{6}} = \frac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}$ seguindo a generalização, resultando em uma nova estratégia para encontrar as raízes quadradas de 150 e 6. As raízes serão $x = 5$ ou $x = -5$, ou seja, o lado do quadrado é igual a 5 cm.

Este cálculo é facilmente resolvido no GeoGebra ao inserir a equação $6x^2 = 150$ no campo de entrada e utilizar o comando “*Resolver(<Equação>)*” sempre apertando na tecla “*Enter*” e teremos como resultado o que está ilustrado a figura 68.

TAREFA 2. Luiz comprou uma caixa com peças e acessórios de PC-game para dar de presente de aniversário a Jânio, seu amigo de infância. Luiz não querendo gastar em papel de presente, utilizou um papel de presente que tinha guardado para embrulhar a caixa que tinha o formato de cubo. Luiz, ao visualizar a caixa, percebeu que ela continha descrição apenas da área suficiente para cobrir a caixa sem desperdiçar papel, 3750 cm^2 . Mas, Luiz percebeu que para cortar o papel na medida

correta precisaria saber as dimensões da caixa. Qual deve é a medida do lado dessa caixa?

FIGURA 68: Caixa planificada.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

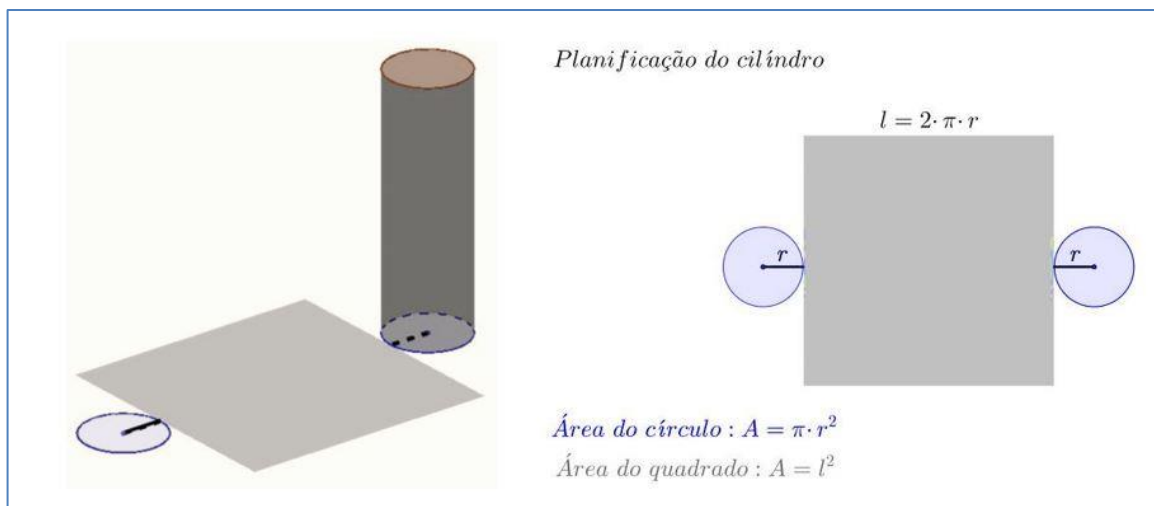
Resolução: A partir da leitura do problema, o que se pede é apenas a medida do lado da caixa (cubo). Utilizando a janela 3D do GeoGebra podemos desenhar o cubo e, em seguida, selecionar o ícone de planificação para verificar toda a superfície do cubo que será visualizado nas janelas 2D e 3D.

Como o cubo possui 6 faces e cada face possui área igual a x^2 e a área total dessas faces é de 3750 cm^2 , teremos:

$$6x^2 = 3750 \Rightarrow x^2 = \frac{3750}{6} \Rightarrow x^2 = 625 \Rightarrow x = \pm\sqrt{625}$$

Logo, as raízes serão $x = 25$ ou $x = -25$, assim, o lado do quadrado é igual a 25 cm . É importante chamar atenção para o fato de que as ações e operações para resolver esta tarefa são as mesmas da tarefa anterior, porém, se diferencia na leitura e interpretação do problema, podendo ajudar os estudantes na assimilação dos conceitos de geometria espacial.

TAREFA 3. Deduzir fórmula geral da área total da superfície de um cilindro com as bases cobertas. Sabendo que a superfície que une as bases circulares, quando planificado, forma um quadrado. (Considere $\pi = 3,14$).

FIGURA 69: Planificação da superfície lateral do Cilindro.

Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Resolução: A partir da leitura do problema, o que se pede fórmula geral da soma da superfície lateral com as bases do cilindro. Utilizando a janela 3D do GeoGebra podemos desenhar o cilindro planificá-lo para verificar toda a superfície do cubo que será visualizado nas janelas 2D e 3D.

Contudo, para a dedução da fórmula os estudantes deverão considerar que o lado do quadrado será igual ao comprimento da circunferência $l = C = 2\pi r$, como a área do quadrado é dado por $A_q = l^2$, a área da superfície lateral do cilindro resultará em $A_q = (2\pi r)^2$. Já a área dos círculos formados pelas bases do cilindro será dada por $A_c = \pi r^2$, porém, como temos duas bases iguais, então $A_c = 2\pi r^2$. Portanto, basta fazer as somas e operações necessárias para deduzir a fórmula da área total A_T :

$$A_T = A_q + A_c = (2\pi r)^2 + 2\pi r^2 = 4\pi^2 r^2 + 2\pi r^2 =$$

$$A_T = 2\pi r^2 \cdot (2\pi + 1)$$

Ao utilizar o GeoGebra, os cálculos algébricos serão realizados na janela de cálculo algébrico simbólico (CAS). A partir daí podem ser feitas outras perguntas como: Qual será a medida do raio quando a área total for igual a 676 cm^2 ? Qual será a área total quando o raio for igual a 10 cm ?

TAREFA 4. Uma aplicação prática de equações do 2º grau ocorre na cinemática. Uma expressão que descreve o quanto o objeto se desloca em função do

tempo é dada aproximadamente pela equação $S = 5 \cdot t^2$. Onde S é o espaço percorrido, em metros, e t o tempo, em segundos, que passou após o objeto permanecer livre, apenas sob ação da gravidade.

a) Gilson tem um poço seco de 20 metros, soltando uma pedra do topo, quanto tempo se passa para que essa pedra atinja o fundo do poço?

b) Gilson encontra outro poço seco, joga uma pedra e percebe que a pedra atinge o fundo do poço em 1,5 segundo. Qual a profundidade do poço?

Resolução: Para o item (a), o deslocamento será de 20 metros, pois substituindo $S = 20$ na expressão e, realizando os cálculos, temos:

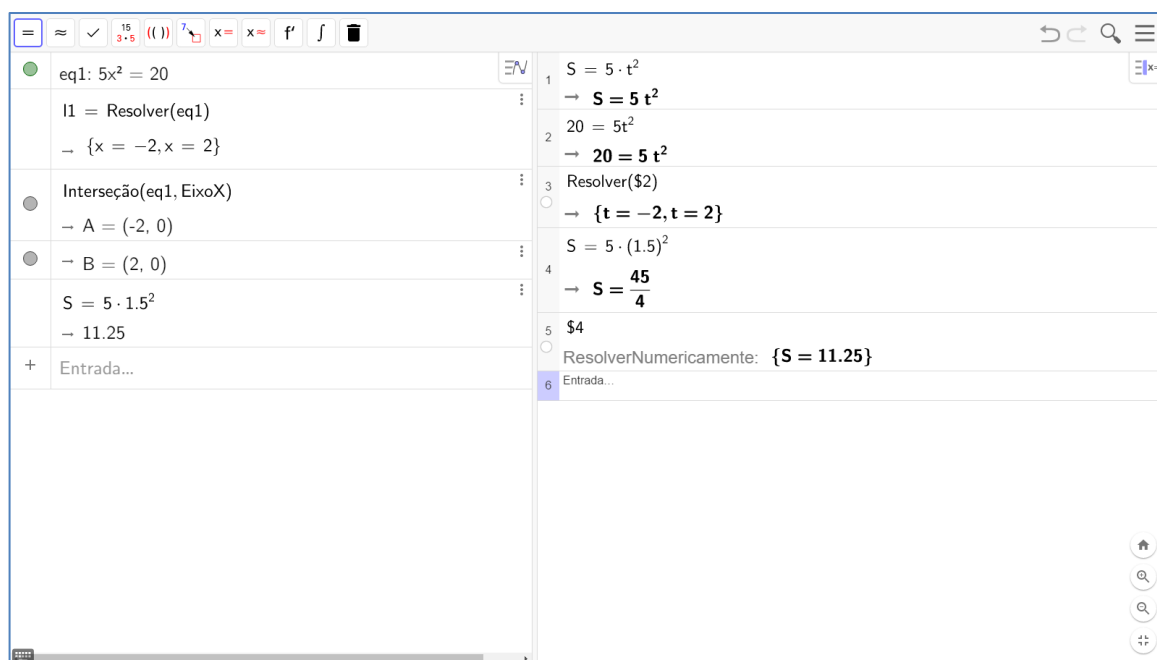
$$5t^2 = 20 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm\sqrt{4} \Rightarrow t = 2 \text{ s} \text{ ou } t = -2 \text{ s}$$

A interpretação do problema nos permite apenas a solução de $t = 2\text{s}$, logo Gilson percebeu que em 2 segundos a pedra atinge o fundo do poço. Para resolver o item (b), basta substituir $t = 1,5$ na expressão e, realizando os cálculos, temos:

$$S = 5 \cdot (1,5)^2 = 5 \cdot (2,25) = 11,25 \text{ m}$$

Portanto, Gilson verificou que o segundo poço possui 11,25 metros de profundidade. Agora, com o auxílio do GeoGebra, o estudante pode utilizar um processo semelhante à tarefa 1 da sequência 2, mas sem utilizar os controles deslizantes.

Ao abrir a janela CAS, basta substituir o valor de S e usar o comando resolver, como consta nas linhas 2 e 3 da figura 62, o que responde ao item (a). Nas linhas 4 e 5, contêm a resolução do item (b), porém, na janela CAS, mesmo com entradas de números decimais a resposta será mostrada, automaticamente conforme configurações, no formato de fração. Para mostrar o resultado em forma decimal basta clicar no ícone resolver numericamente  da janela CAS.

FIGURA 70: Cálculo algébrico da expressão na janela CAS.

Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

Os mesmos cálculos também podem ser realizados na janela de álgebra. Contudo, a escolha pela janela CAS ou da janela de álgebra dependerá dos objetivos de ensino.

TAREFA 5. Considere as seguintes afirmações. Justifique as afirmações verdadeiras, e encontre exemplos que falham nas afirmações falsas. Sobre uma equação do tipo $ax^2 = b$ podemos afirmar que:

a) Se a ou b forem positivos, essa equação tem duas soluções.

b) Se a for igual a zero então essa equação nunca tem solução.

c) Se b for igual a zero, então $x = 0$ é sempre solução.

d) Essa equação pode ter uma única solução, duas soluções, nenhuma solução ou infinitas

Resolução:

Item (a) Falso, se $b = 0$, temos a equação $ax^2 = 0$. Se a for 1, por exemplo, a equação fica $x^2 = 0$ que só tem a solução $x = 0$.

Item (b) Falso, se $b = 0$ a equação fica $0x^2 = 0$. Perceba que qualquer número que você pensar e colocar no lugar do x funciona como solução.

Item (c) Verdadeiro. Veja que a equação fica $ax^2 = 0$, pelas afirmações anteriores concluímos que de fato $x = 0$ é solução.

Item (d) Verdadeiro, essa é a conclusão sobre essa aula, uma vez que nas aulas anteriores conseguimos identificar os casos de ter uma solução ou duas soluções, e nessa aula vimos os casos de não ter solução ou ter infinitas soluções.

TAREFA 6. Elabore um problema que possa ser resolvido a partir da resolução de uma equação na forma $ax^2 = b$, e depois discuta quantas são as soluções possíveis e por quê.

Resolução: Como se trata de uma questão pessoal, traremos aqui um exemplo para compreender o que pode ser feito:

“Três quadrados idênticos possuem juntos uma área total de 867 m^2 . Qual é o lado de cada um deles?”

Resolução possível:

$$3x^2 = 867 \Leftrightarrow x^2 = \frac{867}{3} \Leftrightarrow x^2 = 289$$

$$x = \sqrt{289} \text{ ou } x = -\sqrt{289}$$

$$x = 17 \text{ ou } x = -17$$

Nesse caso, é preciso lembrar que a solução só pode ser um número positivo para o caso de medidas, porém, pode ser proposto um problema que requer um valor negativo como solução, ou até mesmo um item que peça a realização de uma operação com as soluções encontradas.

A tarefas que compõem esta sequência de tarefas exigem dos estudantes conhecimentos novos sobre conceitos de geometria espacial e de função e, que podem ser desenvolvidas com os alunos na janela 3D do GeoGebra. São problemas que exigem dos estudantes todas as etapas da ASPM, desenvolvendo assim, o pensamento algébrico.

Vale ressaltar que todas as sequências de tarefas e a SD realizada na pesquisa farão parte do Produto Educacional que foi elaborado com o intuito de aproximar tanto os estudantes quanto os professores do ensino e aprendizagem da matemática por meio das tecnologias. Por consequência, os estudantes desenvolvem as

competências e habilidades em álgebra com TDIC e os professores desenvolve competências quanto ao GeoGebra.

Considera-se que é de suma importância que os professores de matemática, em plena era digital, conheçam e utilizem as tecnologias voltadas ao ensino e desenvolvimento de habilidades. Não somente para ensinar álgebra, mas todos os objetos de conhecimento possíveis.

Portanto, o professor que estiver disposto a fazer a mudança nas suas aulas, tem o dever de utilizar tais ferramentas para melhorar o aprendizado de seus alunos. Podendo, então, fazer uso destas tarefas em suas aulas de álgebra ou, a partir delas, elaborar um material que possa auxiliá-lo em outros objetos de conhecimento. Na seção a seguir é apresentada a SD realizada com os participantes da pesquisa.

3.7 TAREFAS NO GEOGEBRA

As atividades descritas na subseção a seguir foram elaboradas para que o professor se familiarize com o GeoGebra e que poderão lhe servir de modelo para a criação de suas próprias SD a serem aplicadas com seus estudantes nos conteúdos descritos pela BNCC (BRASIL, 2018). Porquanto, a Sequência Didática, o Material didático (Tutorial de noções básicas do GeoGebra) e a Sequência de Tarefas compõem o Produto Educacional.

Na SD define-se o objeto de Conhecimento, o objetivo geral, a habilidade e o problema inicial a ser resolvido por meio da ASPM e envolve a sequência de tarefas que é apresentada em dois momentos, ao início e ao final da investigação. Nesta SD, serão abordados recursos para a modelagem e a resolução de problemas no GeoGebra que possam ser representados por meio de equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

3.7.1 Sequência Didática

Objeto de conhecimento: Equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

Competências específicas: 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos,

desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados (BRASIL, 2018).

Habilidade: (EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

Objetivo de aprendizagem: Resolver equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

Objetivo geral: Investigar as contribuições do GeoGebra no desenvolvimento da habilidade de resolver e elaborar, com uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$, por meio da Atividade de Situações Problema.

Conhecimento prévio: Equações; Área do retângulo; Área do quadrado.

Materiais e recursos: Computador e Conceitos básicos sobre o GeoGebra para tratar de situações problema (Material didático).

DESENVOLVIMENTO

Quantidade de aulas: 3

AULA 1

TAREFA1. Ana Viajou para Índia mês passado e comprou um dos famosos tapetes indianos que possui uma área quadrada de 5 m^2 . Porém, Ana preocupou-se do tapete ficar maior que o chão de seu pequeno quarto para meditação medindo $2,5 \text{ m}^2$, então resolveu medir o lado do tapete para tirar sua dúvida. Qual é a medida aproximada do lado do tapete de Ana? E como resolver o problema utilizando o GeoGebra?

Passos a serem desenvolvidos no GeoGebra: Montar o modelo matemático e realizar os cálculos na “janela de álgebra”. Desenhar um quadrado na “janela de visualização 2D” com a medida do lado correspondente ao ponto de interseção da reta perpendicular com o “Eixo X”.

TAREFA 2. Na fazenda de seu Zé existem três celeiros quadrados de mesma área um ao lado do outro. Sendo o primeiro celeiro para a colheita de arroz, o segundo para

a colheita de feijão e o terceiro para a colheita de trigo. Os três celeiros ocupam uma área total de 300 m^2 . Utilizando o GeoGebra, qual é a medida do lado do celeiro destinada para o armazenamento do arroz?

Passos a serem desenvolvidos no GeoGebra: Montar o modelo matemático e realizar os cálculos na “janela de álgebra” ou “janela CAS”. Desenhar os quadrados na “janela de visualização 2D” com a medida do lado correspondente ao ponto de interseção da reta perpendicular com o “Eixo X”.

AULA 2

TAREFA 3. Dona Lurdes é costureira, e essa semana resolveu fazer uma colcha com 10 retalhos quadrangulares de dimensões idênticas que sobraram de outros tecidos. Dona Lurdes pretende costurar os retalhos de forma que sua superfície seja de 2 m^2 . Como podemos utilizar o GeoGebra para encontrar a medida do lado de cada retalho?

FIGURA 71: Colcha de retalhos quadrangulares da tarefa 2.



Fonte: Adaptado do Google imagens (2018)

Passos a serem desenvolvidos: Desenhar um quadrado na “janela de visualização 2D” (podendo fixar a imagem dos retalhos na janela de visualização) para posteriormente redimensioná-lo ou inserir o texto da questão. Montar o modelo matemático e realizar os cálculos na “janela de álgebra” e na “janela CAS”.

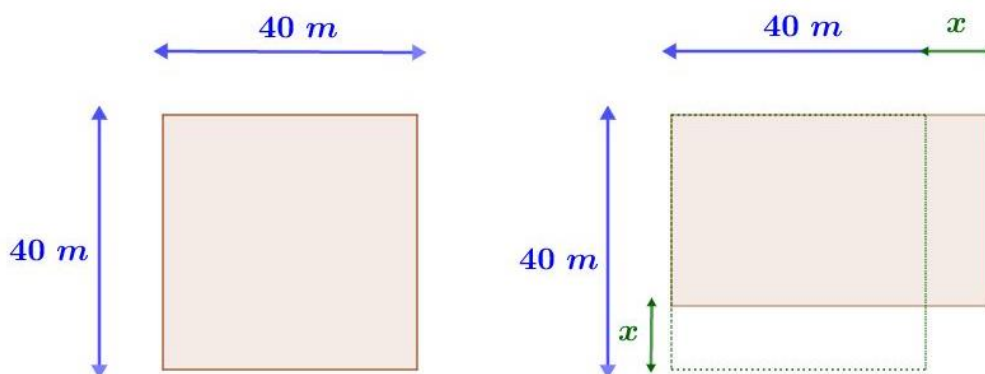
TAREFA 4. Como podemos utilizar o GeoGebra para determinar a medida do lado de um dos quadrados que compõem as faces de um cubo. Sabendo que esse cubo possui 150 cm^2 de área total em sua superfície?

Passos a serem desenvolvidos: Desenhar um cubo na “janela de visualização 3D” e posteriormente planificá-lo e redimensioná-lo. Na “janela de visualização 2D” apresentará a planificação. Montar o modelo matemático e realizar os cálculos na “janela de álgebra”.

AULA 3

TAREFA 0 (Problema inicial). Um terreno tem um formato quadrangular com 40 m de lado. O dono do terreno precisa fazer uma alteração para que ele passe a ter apenas 1200 m^2 de área. Para isso, achou viável reduzir a largura e aumentar o comprimento na mesma medida. Observe o esquema da figura para atender o que se quer fazer:

FIGURA 72: Terreno em formato quadrangular do problema inicial.



Fonte: Elaboração do autor no GeoGebra

- É possível escrever um modelo de equação que represente a situação problema?
- Qual(is) propriedade(s) pode(m) ser utilizada(s) resolver o modelo da equação?
- A equação encontrada equivale ao formato da equação $ax^2 = b$?
- Quais são os valores de a e b na equação encontrada?
- Quais são os possíveis valores para x ?

Avaliação: Agora os alunos devem ser capazes de resolver e elaborar problemas por equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$. A proposição de tarefas apresentadas na seção 3.7 devem ser sugeridas para o desenvolvimento da habilidade.

O capítulo a seguir está constituído pela análise, resultado e discussão dos dados produzidos a partir da SD realizadas pelos estudantes participantes da pesquisa. Assim, destacando o diagnóstico inicial, resultados das etapas de formação, resultados da avaliação formativa e validade da pesquisa.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A análise e leitura dos dados produzidos foram compostos pelas observações de: como os estudantes desenvolveram, aplicaram e compreenderam as atividades desenvolvidas no GeoGebra e, se realizaram os passos corretamente e dominaram as ferramentas do GeoGebra; as produções dos estudantes por meio do GeoGebra para a compreensão/assimilação da álgebra; assimilação de equações do tipo $ax^2 = b$.

A utilização da ASPM foi de suma importância para a análise dos dados, quanto à compreensão do problema, construção do modelo matemático, resolução do modelo e à interpretação da solução. A TFEAM, também, foi utilizada na análise dos dados para verificação das etapas: Etapa 0 (zero) – motivacional; Etapa 1 - elaboração da base orientadora da ação (BOA); Etapa 2 - formação da ação em forma material ou materializada; Etapa 3 - formação da ação em verbal externa; Etapa 4 - formação da ação da linguagem externa para si e a Etapa 5 - formação da linguagem interna. Dentre as quais:

A primeira etapa de assimilação é “elaboração da base orientadora da ação”, o professor necessita determinar o objetivo de ensino da atividade que deseja formar. O processo de assimilação dos conhecimentos deve plantear-se como habilidades e tarefas. O professor deve considerar o nível dos conhecimentos prévios dos estudantes no planejamento do sistema de ações e incorporar na BOA selecionada. O professor apresenta o objeto de estudo e mostra a parte orientadora, executora e de controle das ações. O professor explica as ações e estudante tenta compreender os aspectos essenciais que permita realizar as ações da atividade que exige o objetivo de ensino (DELGADO; MENDOZA, 2016, p. 376).

Dessa forma, com base nos conhecimentos prévios dos estudantes a BOA selecionada foi concreta, completa e preparada que são atributos da BOA II, porém, para a pesquisa relativas às tarefas, também se estabeleceu a BOA III. A seção a seguir apresentamos um diagnóstico inicial do contexto para a produção dos dados.

4.1 DIAGNÓSTICO INICIAL

A efetivação da pesquisa teve início em 2019 com o objetivo de investigar a contribuição do GeoGebra atrelado à ASPM no desenvolvimento da habilidade de resolver e elaborar problemas de equações polinomiais do 2º grau do tipo $ax^2 = b$ como unidade temática nos estudantes do 8º ano.

Primeiramente, foram realizadas visitas às escolas do município de Boa Vista/RR, nas quais, apresentavam as condições favoráveis para darmos início à pesquisa. Assim, foram realizadas visitas em seis escolas estaduais de Ensino Fundamental, a fim de verificar as condições dos laboratórios de informática dessas escolas.

Desse modo, das seis escolas visitadas, apenas as escolas localizadas no centro da cidade de Boa Vista obedeciam aos pré-requisitos estabelecidos pelo pesquisador, possuindo assim, um quantitativo suficiente de máquinas (computadores) para dar início à pesquisa. Assim, a EEML foi escolhida, pois, continha, até a visitação, 17 computadores em funcionamento.

Verificamos que o sistema operacional (Linux Educacional 5) instalados nos computadores do laboratório de informática da escola, segundo o suporte técnico da Secretaria da Educação e Desportos (SEED), trata-se de um sistema operacional padrão da maioria das escolas estaduais do município de Boa Vista, não suportaria a instalação do GeoGebra Classic 6. Contudo, com a autorização da escola, as providências foram tomadas, como a instalação de um dual booting¹⁸ do sistema operacional Linux Ubuntu.

O sistema Ubuntu foi selecionado por conta do baixo desempenho dos computadores da escola, pois eram máquinas do Pregão 2007/2008 e que suportavam apenas o GeoGebra 4 e *softwares* educacionais. Todavia, quanto à escolha de uma turma do 8º ano e do estabelecimento do objeto de conhecimento não tivemos problemas, dois dos pré-requisitos estabelecidos pelo pesquisador que foram resolvidos rapidamente.

Para a execução da ASPM foram elaborados um Material Didático e uma SD composta de 5 tarefas para serem aplicadas durante os 15 encontros. Com o objetivo de explorar o GeoGebra e suas múltiplas funcionalidades, por meio de situações problema para o desenvolvimento das habilidades, fez-se necessária uma intervenção do pesquisador nas aulas de matemática. Dessa forma, cada estudante teve a

¹⁸ O *dual booting* consiste em colocar dois ou mais sistemas operacionais para rodarem de maneira independente num mesmo computador.

oportunidade de desenvolver habilidades matemáticas com tecnologias. Delgado e Mendoza (2016, p. 364) afirmam que,

As habilidades são o produto da sistematização das ações por parte de sujeito de forma consciente em condições tais que permitam um constante desenvolvimento e os hábitos constituem a assimilação de aquilo aspectos estruturais da atividade que são as operações. Ou seja, as habilidades são ações sistemáticas não automatizadas, enquanto os hábitos são operações sistemáticas automatizadas. O surgimento dos hábitos tem como base as habilidades, mas necessariamente não todas as habilidades se convertem em hábitos.

No quadro 5, consta o planejamento para aplicação das atividades realizadas. Neste quadro foram previstos quinze encontros para a realização da sequência de tarefas que perpassaram por: noções básicas do GeoGebra, introdução de conceitos, resolução de situações problema e aplicação das tarefas. Vale ressaltar que todas as atividades foram reorganizadas e corrigidas, quando houve necessidade, com introdução de sugestões e intervenções para aplicações futuras.

No primeiro encontro, os estudantes receberam algumas noções básicas sobre a utilização do GeoGebra e das ferramentas que foram utilizadas nas atividades seguintes e, também foi apresentado aos estudantes o problema inicial. Ainda no primeiro encontro, foi realizada uma avaliação diagnóstica e foram dadas noções básicas para o salvamento das atividades no computador. Foi dado início à aplicação da tarefa 1 e, como não houve tempo suficiente para finalizá-la em sua totalidade, a tarefa foi salva para serem retomadas no encontro seguinte. Da mesma forma transcorreram nos demais encontros.

Do segundo ao quinto encontro, foram aplicadas todas as tarefas restantes visando a resolução de equações polinomiais do 2º grau do tipo $ax^2 = b$. Além disso, foram apresentadas as particularidades das equações polinomiais do 2º grau do tipo $ax^2 = b$ quanto à interpretação da solução, sua relação com geometria e outras possibilidades de resolução das atividades no GeoGebra. A BNCC chama atenção para a relação entre geometria e álgebra, pois apresenta que,

[...] A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam “fazer a quadratura de uma figura”). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau (BRASIL, 2018, p. 272-273).

Para a produção dos dados, foram levadas em consideração a teoria utilizada, todas as observações sobre as ações primárias e secundárias que foram realizadas

durante as aulas com relação à resolução do problema e de seu desenvolvimento no GeoGebra, o salvamento das atividades e da avaliação formativa durante toda a pesquisa.

No decorrer da realização da pesquisa, alguns computadores apresentaram defeitos. Por esse fato, os alunos participantes da pesquisa foram postos em trios e até quartetos. Contudo, tais imprevistos não afetaram a coleta dos dados e a participação dos estudantes, pois estavam motivados em conhecer o GeoGebra.

4.1.1 Categorias e Observações

A pesquisa foi guiada pelo programa de produção de dados referentes às observações das atividades realizadas pelos estudantes no GeoGebra e da apreciação das tarefas e avaliações.

Logo no primeiro encontro foi realizada de uma avaliação diagnóstica para sondagem dos conhecimentos prévios dos estudantes, para estabelecer o ponto de partida. A exposição dos resultados foi adquirida de forma verbal, pois as questões foram apresentadas aos estudantes em Datashow e lhes foram dados alguns minutos para resolverem as questões.

Para a realização de uma avaliação diagnóstica foram abordados conteúdos já estudados em anos/séries anteriores como: módulo (valor absoluto) de um número inteiro, divisão, potenciação, área e raiz quadrada. Dentre os conteúdos, os estudantes relataram “não lembrar” como encontrar o valor absoluto de um número inteiro e que ainda sentiam dificuldades em operações com raiz quadrada.

Assim, foi constatada pouca solidez quanto ao cumprimento das ações relativas à aplicação de propriedades, porém, demonstraram razoável consciência das operações realizadas. Pois, sabem operar divisão, potenciação e raiz quadrada, mas relatam que quando se envolvem as incógnitas x , y , z etc. as “contas ficam mais difíceis.” Ou seja, o grau de racionalidade em torno de operações algébricas, pois ainda sentem dificuldades em generalizar as operações (pouca generalização).

Assim, por meio da avaliação diagnóstica foi possível estabelecer uma sequência de tarefas a serem realizadas no GeoGebra. Ao serem perguntados, de maneira informal, sobre suas experiências com tecnologias, a maioria respondeu não

ter acesso a tecnologias para aprendizagem. E, quando perguntados se conheciam o GeoGebra, responderam não saber do que se tratava.

Logo após a aplicação do diagnósticos dos participantes, foi apresentado o Material Didático composto por um tutorial das funcionalidades básicas do GeoGebra Classic 6 e que foi disponibilizado aos estudantes em formato digital. Ainda foi apresentada a Tarefa 0 com motivação para as ações da ASPM com auxílio do GeoGebra. Para Mussato (2006, p. 20):

A motivação intrínseca configura-se como uma tendência natural para buscar novidades e desafios. O indivíduo realiza determinada atividade pela própria causa, por considerá-la interessante, atraente ou geradora de satisfação. É uma orientação motivacional que tem por característica a autonomia do aluno e a autoregulação de sua aprendizagem. No contexto escolar, acredita-se que os processos de aprendizagem podem ser sustentados pela motivação intrínseca, pois, um estudante com esse padrão motivacional mostra-se engajado e persistente mesmo em atividades desafiadoras, buscando desenvolver novas habilidades. O envolvimento de um indivíduo em atividades por razões intrínsecas gera satisfação pessoal e facilita a aprendizagem e o desempenho, gerando expectativas positivas de desempenho e realimentando a motivação para aquela atividade.

Portanto, a etapa motivacional se faz necessária, principalmente para que o aluno desenvolva habilidades matemáticas. No caso desta pesquisa, vários fatores serviram de motivação e o principal foi o GeoGebra.

As ações da ASPM foram analisadas e convertidas em categorias e, as operações em subcategorias para a compreensão das ações pelos estudantes e a análise dessas ações pelo pesquisador. A Atividade de Situações Problema em Matemática é composta por quatro categorias e suas respectivas subcategorias.

A primeira categoria está caracterizada por Compreender o Problema e compreende as subcategorias, em que, o estudante extrai os dados do problema, determina as condições do problema e define os objetivos do problema.

A segunda categoria é caracterizada por Construir o Modelo Matemático e compreende as subcategorias, em que, o estudante determina as variáveis e incógnitas, dá nome as variáveis ou incógnitas com suas medidas, constrói o modelo matemático a partir das variáveis e incógnitas e condições e realiza as análises das unidades de medidas do modelo matemático.

A terceira categoria é caracterizada por Solucionar o modelo matemático e compreende as subcategorias, em que, o estudante deve selecionar os métodos matemáticos para solucionar o modelo matemático, selecionar um programa

informático (GeoGebra) que contenha os recursos necessários dos métodos matemáticos para solucionar o modelo matemático e por fim, solucionar o modelo matemático.

A quarta categoria é caracterizada por Interpretar a solução e compreende as subcategorias, em que, o estudante interpreta o resultado, extrai os resultados significativos que tenham relação com os objetivos do problema, responde aos objetivos do problema, realiza um roteiro baseado nos objetivos do problema e analisa a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com os objetivos do problema, a possibilidade de reformular o problema, construir novamente o modelo matemático, solucionar o modelo matemático e interpretar a solução.

As observações da avaliação formativa que foram realizadas de forma contínua com questões que compõem uma sequência de tarefas da SD tiveram como objetivo a verificação do desenvolvimento do processo de assimilação do objeto de conhecimento pelos estudantes, o que direciona os estudantes ao desenvolvimento de habilidades. Delgado e Mendoza (2016, p. 366) expõem que o processo de assimilação não é tão simples:

Portanto, a assimilação dos conteúdos ou aquisição de conhecimento exige que o sujeito realize um sistema de atividades, um sistema de ações que se pode transformar em habilidades ou hábitos em determinadas condições do processo de ensino. A atividade ou ações ou habilidade ou hábitos atuam como objeto de assimilação.

A avaliação formativa está composta por: Tarefa 1, Tarefa 2, Tarefa 3 e Tarefa 4 da SD. As tarefas que compõem a avaliação formativa foram sofrendo alterações para melhor compreensão e assimilação das ações. A SD foi comumente aplicada às duplas, trios ou quartetos. Para a organização dos dados e garantia de anonimato dos participantes, cada grupo foi nomeado por “Dupla” de 1 a 9. Todas as tarefas foram realizadas no laboratório de informática da EEML.

A avaliação final se deu apenas em torno da Tarefa 0 e teve como objetivo verificar todo o processo de assimilação e aprendizagem dos estudantes, ou seja, o desenvolvimento da habilidade de resolver problemas de equações polinomiais do tipo $ax^2 = b$, da qual mostrou-se alguns resultados pertinentes na investigação.

Todos os dados para a análise da efetividade das ações mentais, da ASPM e do GeoGebra como tecnologia potencializadora das ações mentais, foram produzidos observando as ações dos estudantes e dos seus arquivos (em extensão.ggb) salvos

em mídias. Desse modo, foram observadas as categorias da TFEAM e da ASPM em cada uma das tarefas aplicadas.

Vale ressaltar que todos os arquivos analisados foram modificados pelo pesquisador alterando-se o tamanho da fonte do GeoGebra e a ordem dos dados inseridos na janela de álgebra por tipo de objeto.

4.2 RESULTADOS DA AVALIAÇÃO FORMATIVA

A pesquisa relativa às etapas de formação das ações mentais consta das observações das atividades realizadas pelos estudantes no GeoGebra e da apreciação das tarefas das avaliações formativa e final. Todas as ações e operações são inerentes de uma atividade e,

Uma atividade de estudo, por suposto tem um objetivo de ensino vinculado à assimilação de certo conteúdo. O aluno necessita realizar um conjunto de ações para ter uma eficiência na assimilação dos conteúdos, manifestado as habilidades de planejar, controlar, resumir, corrigir entre outras. Outras ações estão relacionadas com a ciência e a disciplina que se está estudando. Mas ações num primeiro nível são ações não resumidas que devem transitar para ações resumidas no processo de formação das ações mentais. Por tanto para avaliar a assimilação há que analisar a qualidades das ações que se pode classificar em três níveis: as ações específicas das disciplinas, as ações vinculadas com ciência e as do processo de assimilação (DELGADO; MENDOZA, 2016, p. 366).

Dentre as etapas da TFEAM, a Etapa 0 (motivação) foi desenvolvida com a apresentação das possibilidades de exploração do GeoGebra e da Tarefa 0 e a Etapa 1 (elaboração da BOA) foi concreta, completa e preparada que são atributos da BOA II, quando tratadas as Tarefas 1, 2, 3 e 4 e quando tratada a Tarefa 0, se estabeleceu a BOA III.

A Etapa 2 (forma material ou materializada) se estabeleceu por meio do GeoGebra e Etapa 3 (verbal externa) por seus comandos e funcionalidades para resolver problemas. A Etapa 4 (linguagem externa para si) e a Etapa 5 (linguagem interna) estão ligadas diretamente ao desenvolvimento de habilidades e que se mostram em todas as tarefas.

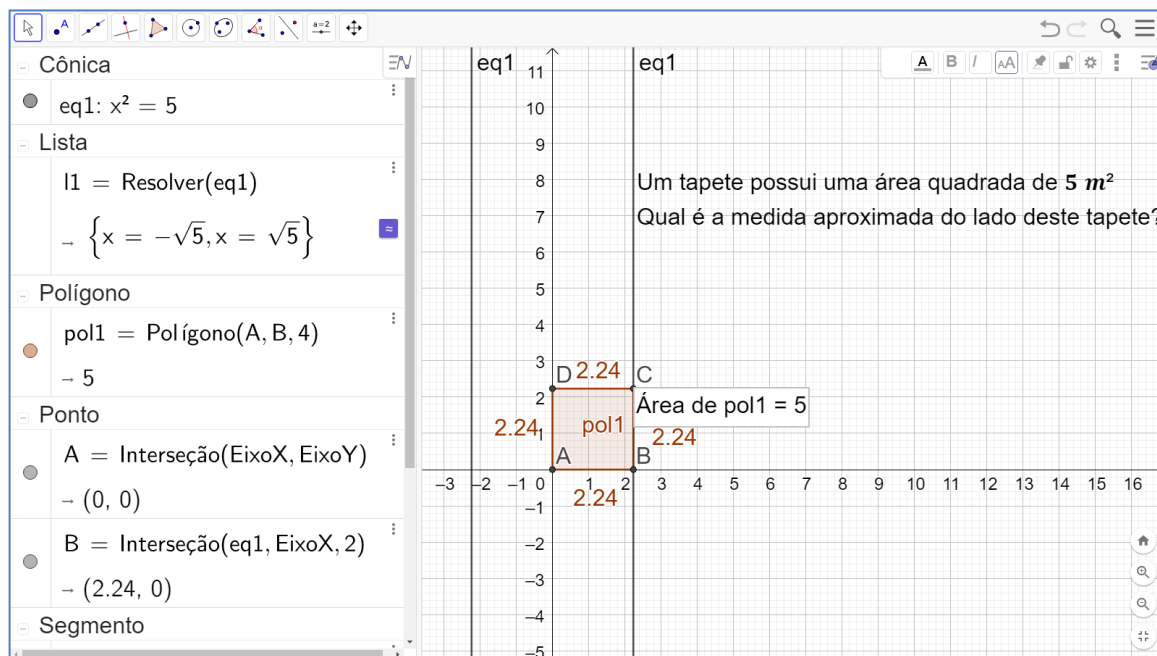
Também se verificou, principalmente, as formas apresentadas por Talízina (1988) sobre o caráter Generalizado, Explanado, Assimilado e o Independente das ações com relação a atividade. Para tanto, foi utilizado o guia qualitativo nomeado de Guia de observação das categorias da TFEAM.

4.2.1 Análise qualitativa sobre a Tarefa 1

Para realizar a análise qualitativa das atividades, foi utilizado o Guia de observação das categorias da ASPM. Deste modo, dos alunos participantes, apenas as Duplas 2, 3, 4 e 5 conseguiram finalizar a Tarefa 1. A Tarefa 1 sofreu alterações no texto para ser inserida na SD para contextualizar a situação problema, mas a pergunta realizada de forma simplificada foi: “Um tapete possui uma área quadrada de 5 m^2 . Qual é a medida do lado deste tapete?”

Com auxílio do professor pesquisador sobre comandos dos ícones no GeoGebra a Dupla 2 demonstrou mais habilidades com o GeoGebra comparada às demais duplas. Utilizaram os comandos “Resolver”, “Área”, “Polígono” e ainda inseriram o texto com o comando “Inserir Texto” e exibiram o rótulo da medida dos lados do quadrado. Esta dupla foi a única que apresentou habilidades tanto com os comandos quanto com as categorias da ASPM na Tarefa 1. A figura a seguir mostra a resolução da Tarefa 1 realizada pela Dupla 2 no GeoGebra.

FIGURA 73: Tarefa 1 realizada pela Dupla 2.



Fonte: Elaboração dos estudantes no GeoGebra

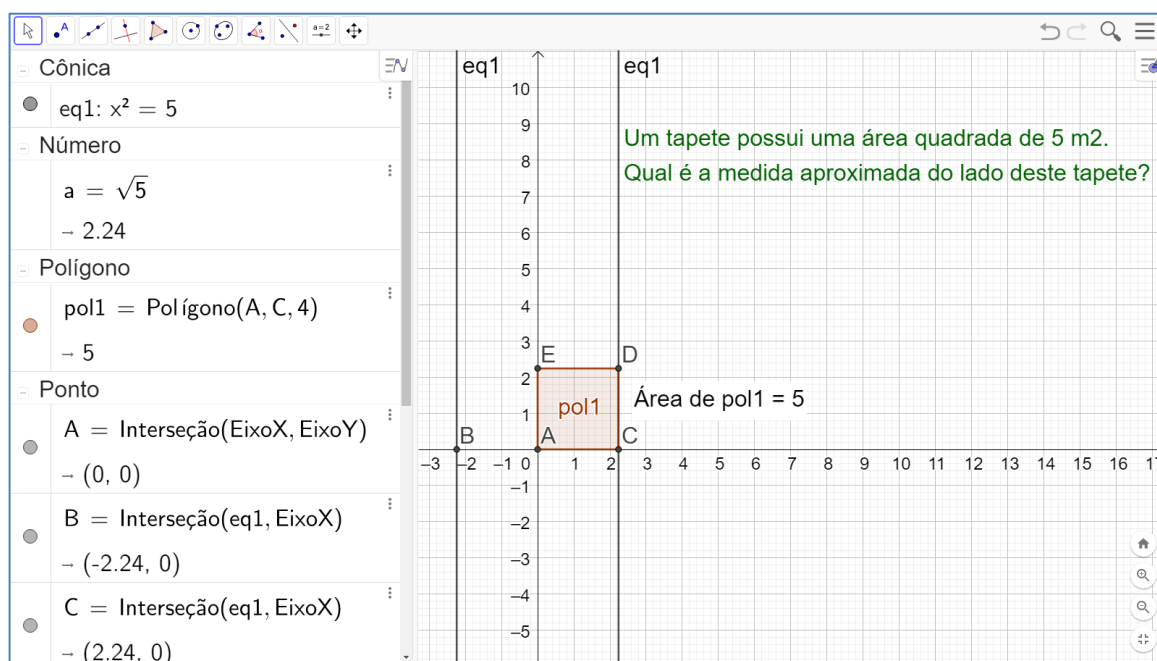
As categorias da ASPM estão caracterizadas por suas subcategorias. Quanto à Dupla 2, quando analisada a primeira categoria, percebeu-se que os estudantes extraíram os dados, determinaram as condições e definiram os objetivos do problema. Na segunda categoria, os estudantes demonstraram saber determinar a incógnita

nomeada de x , construíram o modelo matemático a partir dessa incógnita $x^2 = 5$ e realizaram as análises das unidades de medidas.

Na terceira categoria, a Dupla 2 selecionou o comando “Resolver” para solucionar o modelo matemático por meio do GeoGebra e ao solucionar o modelo matemático encontraram $x = \sqrt{5} = 2,24$. E, na quarta categoria, os estudantes interpretaram o resultado construindo um polígono de área 5 e lado 2,24 a partir da reta perpendicular ao eixo x .

A Dupla 3 conseguiu completar a Tarefa 1 utilizando os comandos: “Inserir Texto”, “Polígono”, “Área” e realizaram extraíram a raiz de 5. A inserção de texto era facultativa, porém, os estudantes se utilizaram bastante desse comando. A figura a seguir mostra a resolução da Tarefa 1 realizada pela Dupla 3 no GeoGebra.

FIGURA 74: Tarefa 1 realizada pela Dupla 3.



Fonte: Elaboração dos estudantes no GeoGebra

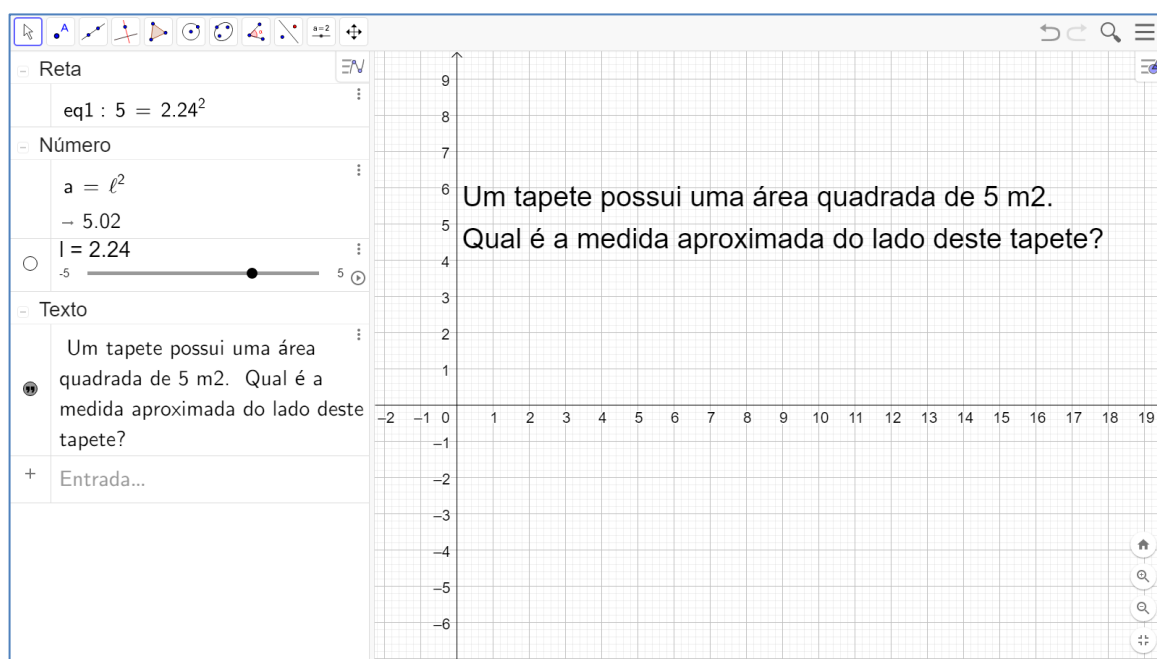
Mesmo sendo a primeira atividade realizada no GeoGebra pelos estudantes, verificou-se que se cumpriram as ações da ASPM. Os alunos compreenderam a atividade, pois no campo de entrada da janela de álgebra inseriram o modelo, resolveram o modelo calculando $\sqrt{5}$ e verificaram o resultado com o comando “Área” aplicado ao quadrado inserido por meio do comando “Polígono Regular” na janela de visualização nos pontos $A = (0, 0)$ e $C = (2.24, 0)$.

Quando analisadas as subcategorias, percebe-se que na primeira categoria da ASPM, os estudantes que compõem a Dupla 3 extraíram os dados, determinaram as condições e definiram os objetivos do problema. Na segunda categoria, os estudantes demonstraram saber determinar a incógnita nomeada de x , construíram o modelo matemático a partir dessa incógnita $x^2 = 5$ e realizaram as análises das unidades de medidas.

Na terceira categoria, a Dupla 3 preferiu fazer o cálculo direto de $\sqrt{5} = 2,24$, mas não solucionaram o modelo matemático e a solução foi encontrada apenas em $a = \sqrt{5}$. E, na quarta categoria, os estudantes interpretaram o resultado construindo um polígono de área 5 a partir da reta perpendicular ao eixo x .

A Dupla 4 utilizou o conhecimento prévio sobre área do quadrado para resolver o modelo matemático. Foi inserido o modelo $5 = l^2$ representando a área e criaram um “Controle deslizante” da variável “ l ” para encontrar por aproximação a igualdade $5 = 2,24^2$. A figura a seguir mostra a resolução da Tarefa 1 realizada pela Dupla 4 no GeoGebra.

FIGURA 75: Tarefa 1 realizada pela Dupla 4.



Fonte: Elaboração dos estudantes no GeoGebra

Nesse aspecto, verificou-se que a Dupla 4 não cumpriu todas as ações da ASPM. Os alunos compreenderam a atividade e utilizaram uma estratégia diferente

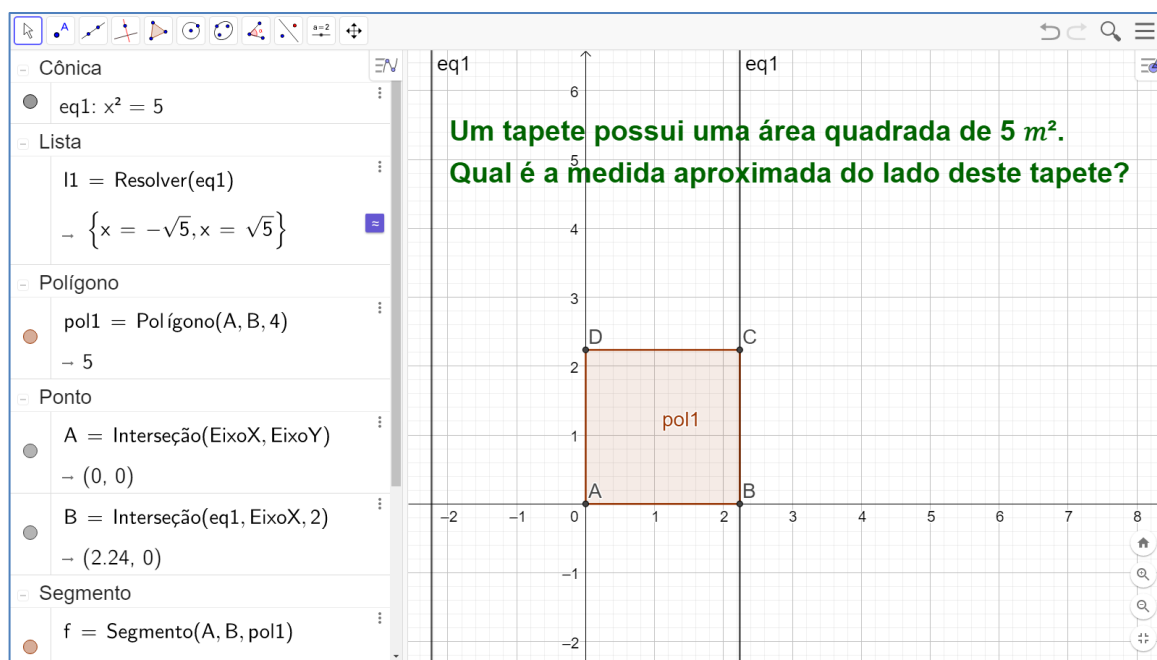
dos demais. Contudo, não houve a interpretação geométrica do problema e a interpretação da solução.

Quando analisadas as subcategorias, percebeu-se que na primeira categoria da ASPM, os estudantes que compõem a Dupla 4 extraíram os dados, determinaram as condições e definiram os objetivos do problema. Na segunda categoria, os estudantes demonstraram saber determinar a incógnita nomeada de l , construíram o modelo matemático a partir dessa variável $l^2 = 5$ fundamentados na expressão usada para o cálculo da área de um quadrado e realizaram as análises das unidades de medidas por meio do controle deslizante sobre a variável l .

Na terceira categoria, a Dupla 4 preferiu fazer uma aproximação e encontrou o valor de 2,24, solucionaram o modelo matemático e a solução foi encontrada apenas em $a = l^2 \approx 5,02$. Já na quarta categoria, os estudantes não realizam a interpretação do resultado.

A Dupla 5 realizou os mesmos passos que a Dupla 3 no GeoGebra, com exceção do comando resolver. A dupla compreendeu a pergunta e inseriu modelo da equação $x^2 = 5$ e com o comando “Resolver” encontrou as duas soluções possíveis $x = -\sqrt{5}$ e $x = \sqrt{5}$. Contudo, para a interpretação da solução não utilizaram o comando “Área”, pois na janela de álgebra encontra-se o ponto $B = (2.24, 0)$ gerado de forma automática na interseção com o eixo x com a reta eq1. Os alunos poderiam utilizar o comando “ResolverNumericamente” para a obtenção da solução racional 2,24. A figura a seguir mostra a resolução da Tarefa 1 realizada pela Dupla 5 no GeoGebra.

FIGURA 76: Tarefa 1 realizada pela Dupla 5.



Fonte: Elaboração dos estudantes no GeoGebra

Quando analisadas as subcategorias, percebeu-se que na primeira categoria da ASPM, os estudantes que compõem a Dupla 5 extraíram os dados, determinaram as condições e definiram os objetivos do problema. Na segunda categoria, os estudantes demonstraram saber determinar a incógnita nomeada de x , construíram o modelo matemático a partir dessa incógnita $x^2 = 5$ fundamentados na expressão usada para o cálculo da área de um quadrado e realizaram as análises das unidades de medidas.

Na terceira categoria, os membros da Dupla 5 optaram pelo comando “Resolver” para solucionar o modelo matemático por meio do GeoGebra e ao solucionar o modelo matemático encontraram $x = \sqrt{5}$. E, na quarta categoria, os estudantes interpretaram o resultado construindo um polígono sem calcular sua área e sem mostrar a medida dos lados do quadrado na janela 2D.

As Duplas apresentaram, diante das categorias analisadas relativas à Tarefa 1, um caráter pouco generalizado para a etapa material e generalizado para a verbal externa e interna. O caráter explanado se deu de forma detalhada nas etapas material e verbal externa. Quanto à independência, frequentemente, deu-se de forma compartilhada.

A assimilação das duplas ao realizarem as ações e operações se deu de forma pouco consciente, pouca solidez e pouca racionalidade, pois necessitaram da intervenção do pesquisador, principalmente com relação aos comandos do GeoGebra. Todavia, as ações mentais foram suficientes para o desenvolvimento da habilidade na Tarefa 1.

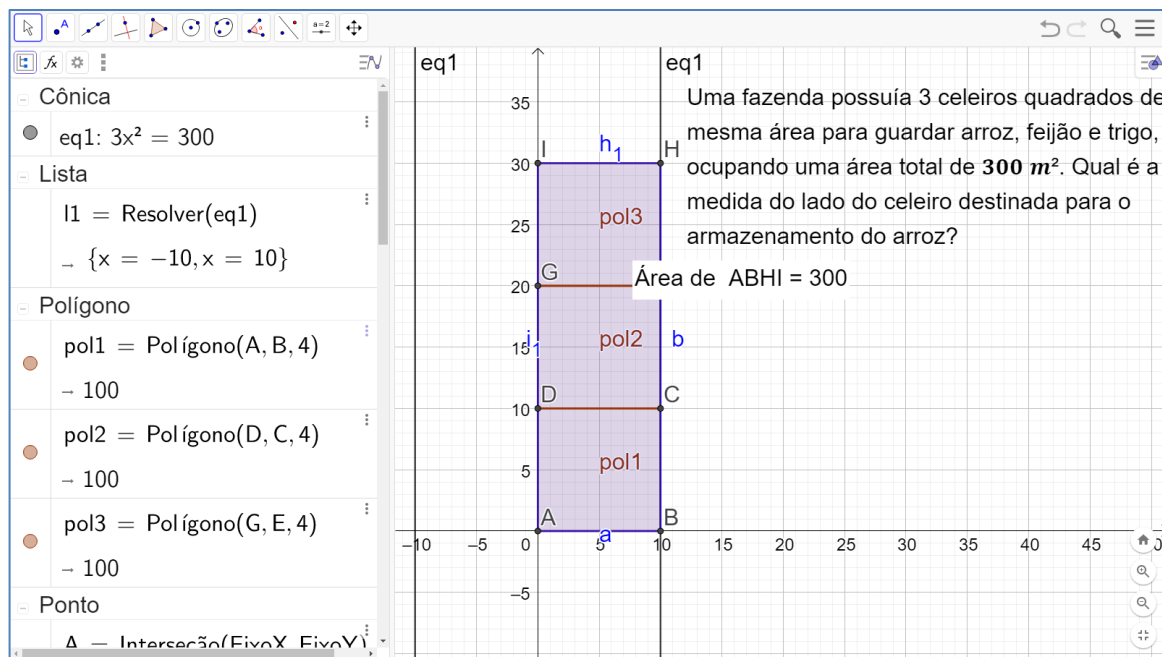
4.2.2 Análise qualitativa sobre a Tarefa 2

Para realizar a análise qualitativa da atividade realizada a partir da Tarefa 2, foi utilizado o Guia de observação das categorias da ASPM. Dos alunos participantes, apenas as Duplas 2, 3, 4, 5 e 6 conseguiram finalizar a Tarefa 2. O texto da situação problema da Tarefa 2 também sofreu alterações ao ser inserido na SD para contextualizar a situação problema.

A pergunta realizada de forma simplificada foi: “Uma fazenda possuía 3 celeiros quadrados de mesma área para guardar arroz, feijão e trigo, ocupando uma área total de 300 m^2 . Qual é a medida do lado do celeiro destinado para o armazenamento do arroz?” Este problema apresenta um leve grau de complexidade se comparado ao problema da Tarefa 1, pois, segundo Delgado e Mendoza (2016, p. 377):

É necessário aumentar a complexidades dos problemas e/ou exercícios, devem ser heterogêneos, diferentes aplicados a diversas situações fazer consciente a atividade. A generalização toma outra dimensão, o sistema de ações deve explicado alcançando certo grau de compactação antes de as novas tarefas não trabalhadas nas etapas anteriores.

O professor pesquisador diminuiu a frequência de auxílios aos alunos sobre comandos dos ícones no GeoGebra. A Dupla 2 conseguiu completar a Tarefa 2 utilizando basicamente os mesmos comandos da Tarefa 1: “Inserir Texto”, “Polígono”, “Área” e “Resolver”. A figura a seguir mostra a resolução da Tarefa 2 realizada pela Dupla 2 no GeoGebra.

FIGURA 77: Tarefa 2 realizada pela Dupla 2.

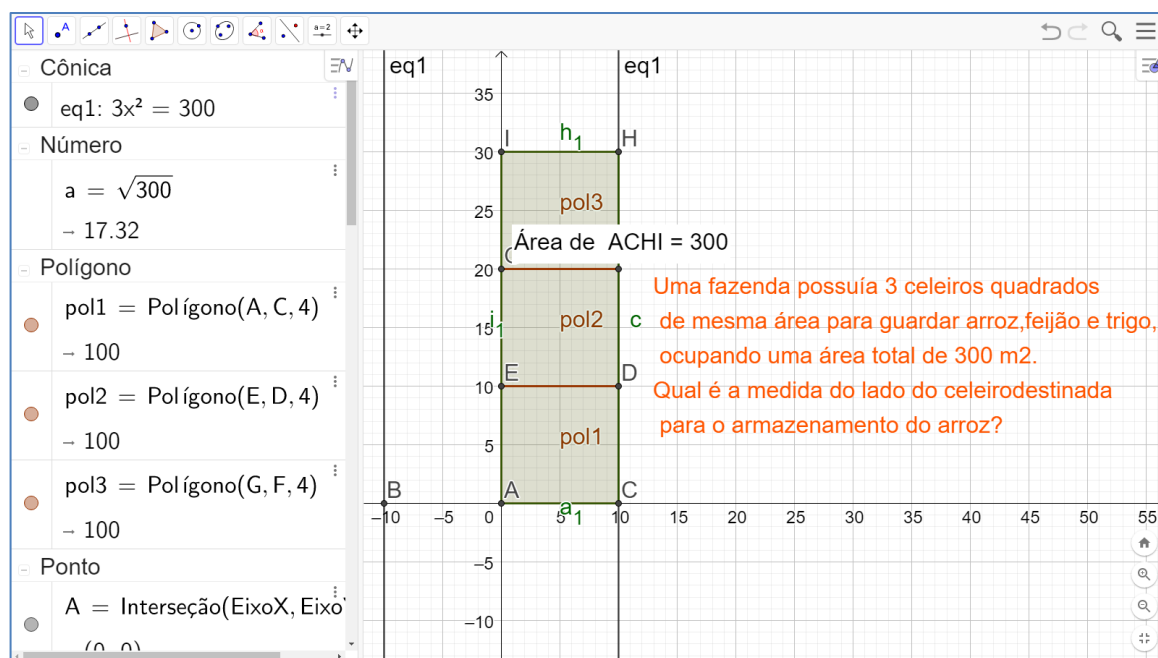
Fonte: Elaboração dos estudantes no GeoGebra

Quando analisadas as subcategorias, a Dupla 2 conseguiu extrair os dados, determinar as condições e definir os objetivos do problema. Na segunda categoria, os estudantes demonstraram saber determinar a incógnita nomeada de x , construíram o modelo matemático a partir dessa incógnita $3x^2 = 300$ fundamentados na expressão usada para o cálculo da área de um quadrado e realizaram as análises das unidades.

Na terceira categoria, os membros da Dupla 2 optaram pelo comando “Resolver” para solucionar o modelo matemático por meio do GeoGebra e ao solucionar o modelo matemático encontraram $x = 10$. E, na quarta categoria, os estudantes interpretaram o resultado construindo três polígonos que representaram os celeiros e calcularam a área de todos os polígonos igual a 300, mas sem mostrarem a medida dos lados desses quadrados na janela 2D, pois se basearam apenas pela medida dos eixos ordenados.

A Dupla 3 também conseguiu completar a Tarefa 2 utilizando os comandos: “Inserir Texto”, “Polígono” e “Área”. Chama a atenção o fato de realizarem o cálculo da raiz de 300 na janela de álgebra, pois, os estudantes deixam claro que não compreenderam o problema. A figura a seguir mostra a resolução da Tarefa 2 realizada pela Dupla 3 no GeoGebra.

FIGURA 78: Tarefa 2 realizada pela Dupla 3.



Fonte: Elaboração dos estudantes no GeoGebra

Quando analisadas as subcategorias, a Dupla 3 conseguiu extrair os dados, determinar as condições e definir os objetivos do problema. Na segunda categoria os estudantes demonstraram saber determinar a incógnita nomeada de x , construíram o modelo matemático a partir dessa incógnita $3x^2 = 300$ fundamentados na expressão usada para o cálculo da área de um quadrado e realizaram as análises das unidades.

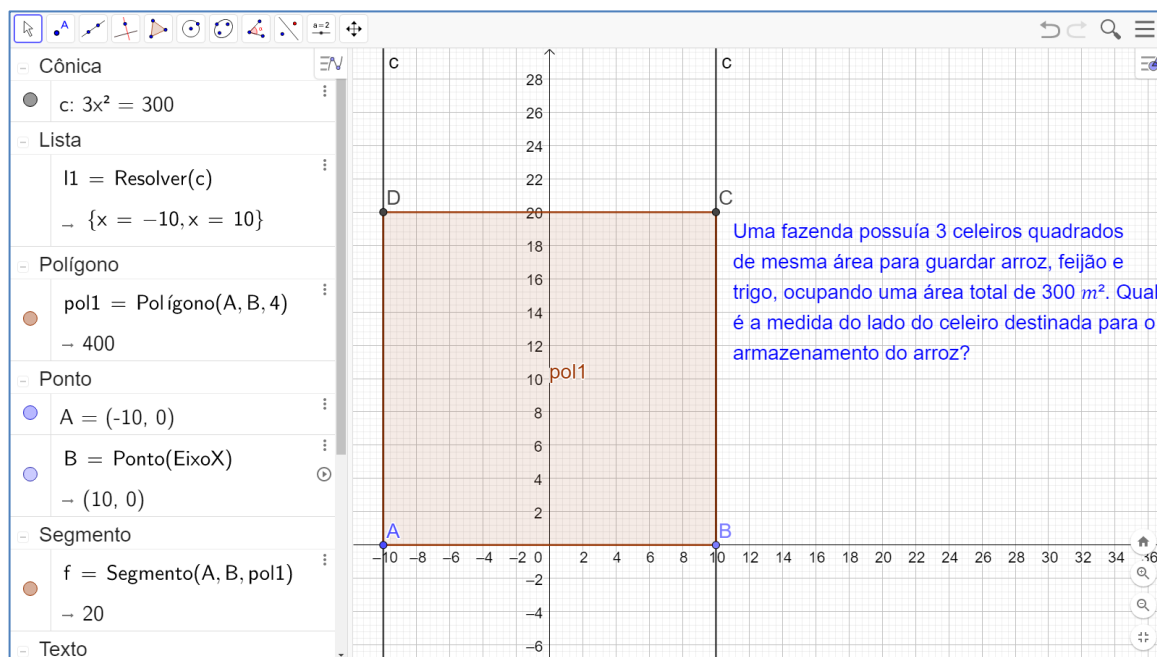
Na terceira categoria, os membros da Dupla 3 não utilizam o comando “Resolver” para solucionar o modelo matemático e não conseguem solucionar o modelo matemático, pois calculam $a = \sqrt{300} \approx 17,32$. Na quarta categoria os estudantes acabam interpretando o resultado construindo três polígonos que representam os celeiros e calculando a área de todos os polígonos igual a 300 utilizando as retas perpendiculares ao eixo x formadas a partir da equação $3x^2 = 300$, em que, demonstram não ter certeza da solução.

Contudo, a Dupla 3 conseguiu realizar os comandos no GeoGebra, mas cumpriram todas as ações da ASPM mesmo a equação indicando o resultado por meio do ponto de interseção da reta eq1 com o eixo x no ponto $C = (10, 0)$.

A Dupla 4 utilizou os comandos: “Inserir Texto”, “Polígono”, “Área” e “Resolver”. E o que chama a atenção é o fato de inserirem um polígono de área 400, pois, os

estudantes deixam claro que não conseguiram interpretar a solução. A figura a seguir mostra a resolução da Tarefa 2 realizada pela Dupla 4 no GeoGebra.

FIGURA 79: Tarefa 2 realizada pela Dupla 4.



Fonte: Elaboração dos estudantes no GeoGebra

Quando analisadas as subcategorias, a Dupla 4 conseguiu extrair os dados, determinar as condições e definir os objetivos do problema. Na segunda categoria, os estudantes demonstraram saber determinar a incógnita nomeada de x , construíram o modelo matemático a partir dessa incógnita $3x^2 = 300$ fundamentados na expressão usada para o cálculo da área de um quadrado e realizaram as análises das unidades.

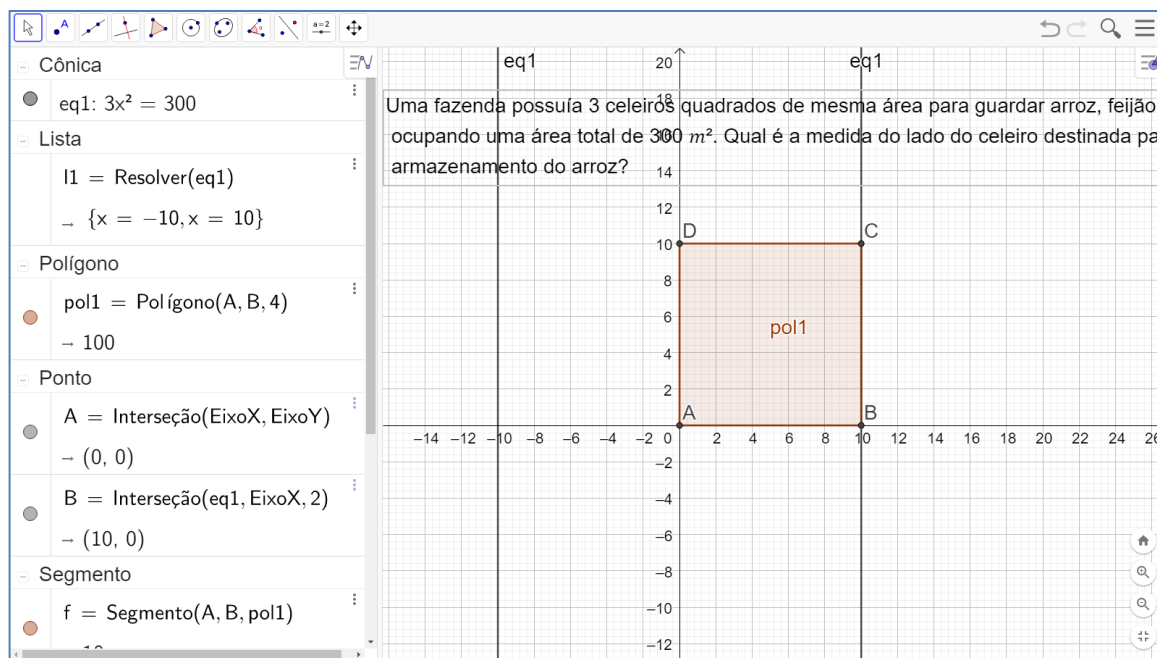
Na terceira categoria, os membros da Dupla 4 optaram pelo comando “Resolver” para solucionar o modelo matemático por meio do GeoGebra e ao solucionar o modelo matemático encontraram $x = 10$. Na quarta categoria, os estudantes não conseguiram interpretar o resultado, pois construíram apenas um polígono de lado 20.

Dessa forma, constatou-se que a Dupla 4 não cumpriu todas as ações da ASPM. Os alunos compreenderam a atividade, montaram o modelo matemático e resolveram, porém, não concretizaram a interpretação da solução.

A Dupla 5 realizou os mesmos passos que a Dupla 4 no GeoGebra, mas concretizaram a interpretação da solução. Na interpretação da solução utilizaram o

comando “Polinômio” gerando de forma automática o quadrado que representa o celeiro de armazenamento do arroz por meio do ponto A = (0,0) e da interseção da reta eq1 com o eixo x no ponto B = (10,0). A figura a seguir mostra a resolução da Tarefa 2 realizada pela Dupla 5 no GeoGebra.

FIGURA 80: Tarefa 2 realizada pela Dupla 5.



Fonte: Elaboração dos estudantes no GeoGebra

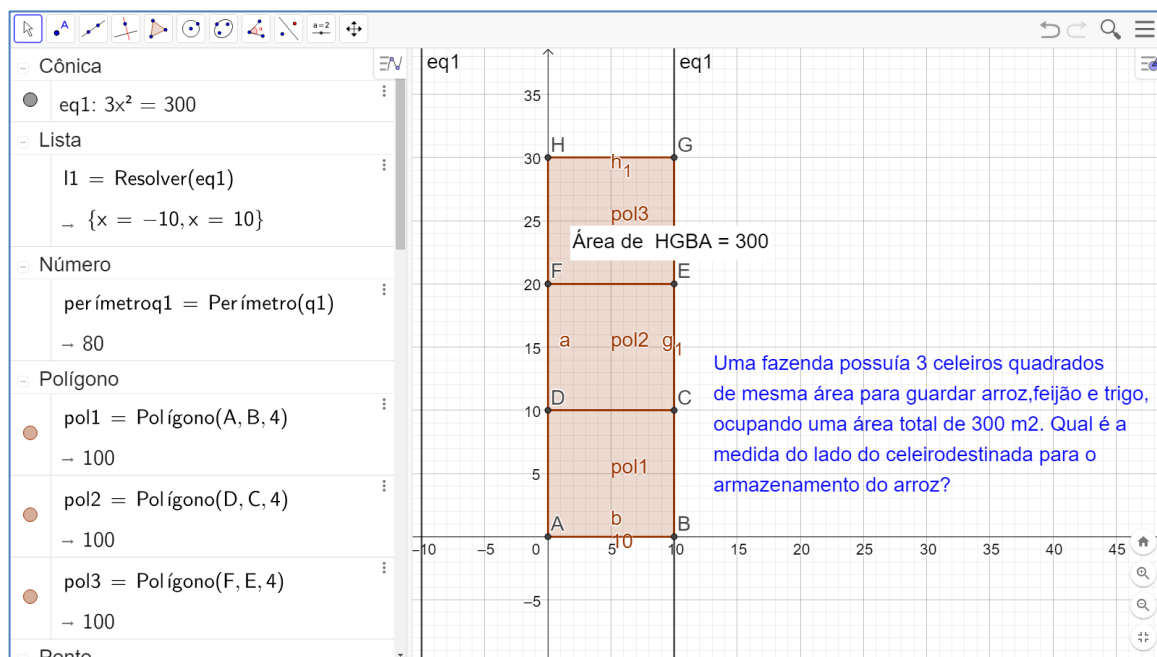
Quando analisadas as subcategorias, a Dupla 5 conseguiu extrair os dados, determinar as condições e definir os objetivos do problema. Na segunda categoria, os estudantes demonstraram saber determinar a incógnita nomeada de x, construíram o modelo matemático a partir dessa incógnita $3x^2 = 300$ e realizaram as análises das unidades.

Na terceira categoria, os membros da Dupla 5 optaram pelo comando “Resolver” para solucionar o modelo matemático e ao solucionar o modelo matemático encontram $x = 10$. Na quarta categoria, os estudantes conseguiram interpretar o resultado, pois construíram um polígono de lado 10 que representa o celeiro para guardar o arroz. Dessa forma, constatou-se que a Dupla 5 cumpriu todas as ações da ASPM. Os alunos compreenderam a atividade, montaram o modelo matemático, resolveram o modelo e interpretaram a solução.

A Dupla 6 utilizou-se dos comandos “Resolver”, “Área”, “Polígono” e “Texto” e apresentaram de forma completa as categorias da ASPM. Esta dupla, assim como a

Dupla 2 na Tarefa 1, apresentou habilidades com os comandos do GeoGebra. A figura a seguir mostra a resolução da Tarefa 2 realizada pela Dupla 6 no GeoGebra.

FIGURA 81: Tarefa 2 realizada pela Dupla 6.



Fonte: Elaboração dos estudantes no GeoGebra

Quando analisadas as subcategorias, a Dupla 6 conseguiu extrair os dados, determinar as condições e definir os objetivos do problema. Na segunda categoria, os estudantes demonstraram saber determinar a incógnita nomeada de x, construíram o modelo matemático a partir dessa incógnita $3x^2 = 300$ fundamentados na expressão usada para o cálculo da área de um quadrado e realizaram as análises das unidades.

Na terceira categoria, os membros da Dupla 6 utilizaram o comando "Resolver" para solucionar o modelo matemático e conseguiram solucionar o modelo matemático, pois encontraram a solução $x = 10$. Na quarta categoria, os estudantes acabaram interpretando o resultado construindo três polígonos que representam os celeiros e calculando a área de todos os polígonos igual a 300 utilizando as retas perpendiculares ao eixo x formadas a partir da equação $3x^2 = 300$, além disso, ainda encontraram o perímetro dos três celeiros. A Dupla 6 conseguiu realizar os comandos no GeoGebra e cumpriram todas as ações da ASPM.

Diante das categorias analisadas relativas à Tarefa 2, as duplas ainda sustentaram um caráter pouco generalizado para a etapa material, de generalizado para a verbal externa e interna, explanado de forma detalhada nas etapas material e

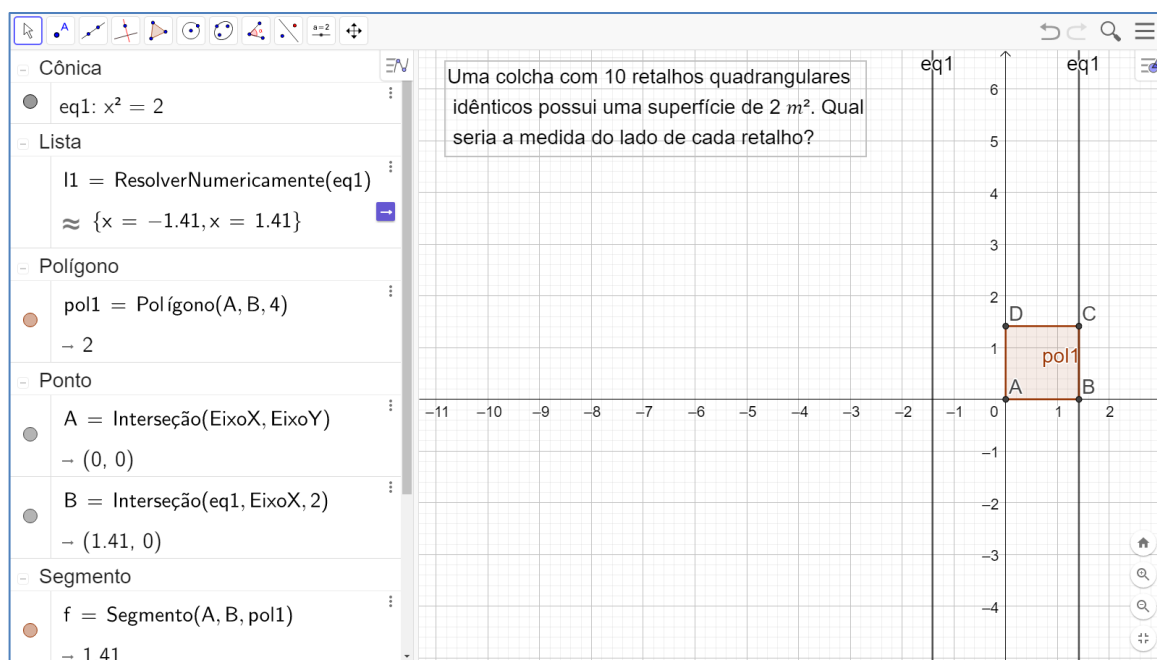
verbal externa e a independência foi compartilhada. A assimilação das duplas ao realizarem as ações e operações foi pouco consciente e com razoável grau de solidez e racionalidade.

4.2.3 Análise qualitativa sobre a Tarefa 3

Para realizar a análise qualitativa da atividade realizada a partir da Tarefa 3, foi utilizado o Guia de observação das categorias da ASPM. Dos alunos participantes, apenas as Duplas 5, 6, 7 e 8 conseguiram finalizar a Tarefa 3. O texto da situação problema da Tarefa 3 também sofreu alterações ao ser inserido na SD para contextualizar a situação problema.

A pergunta realizada de forma simplificada foi: “Uma colcha com 10 retalhos quadrangulares idênticos possui uma superfície de 2 m^2 . Qual seria a medida do lado de cada retalho?” Este problema apresenta um leve grau de complexidade se comparado ao problema da Tarefa 2 e o professor pesquisador não auxiliou os alunos sobre comandos dos ícones no GeoGebra nesta tarefa.

A Dupla 5 conseguiu completar a Tarefa 3 utilizando basicamente os mesmos comandos: “Inserir Texto”, “Polígono” e “Resolver Numericamente”. A dupla não cumpriu todas as etapas da ASPM, pois não compreendeu o problema e, consequentemente, elaborou equivocadamente o modelo $x^2 = 2$ e a interpretação incorreta da solução. A figura a seguir mostra a resolução da Tarefa 3 realizada pela Dupla 5 no GeoGebra.

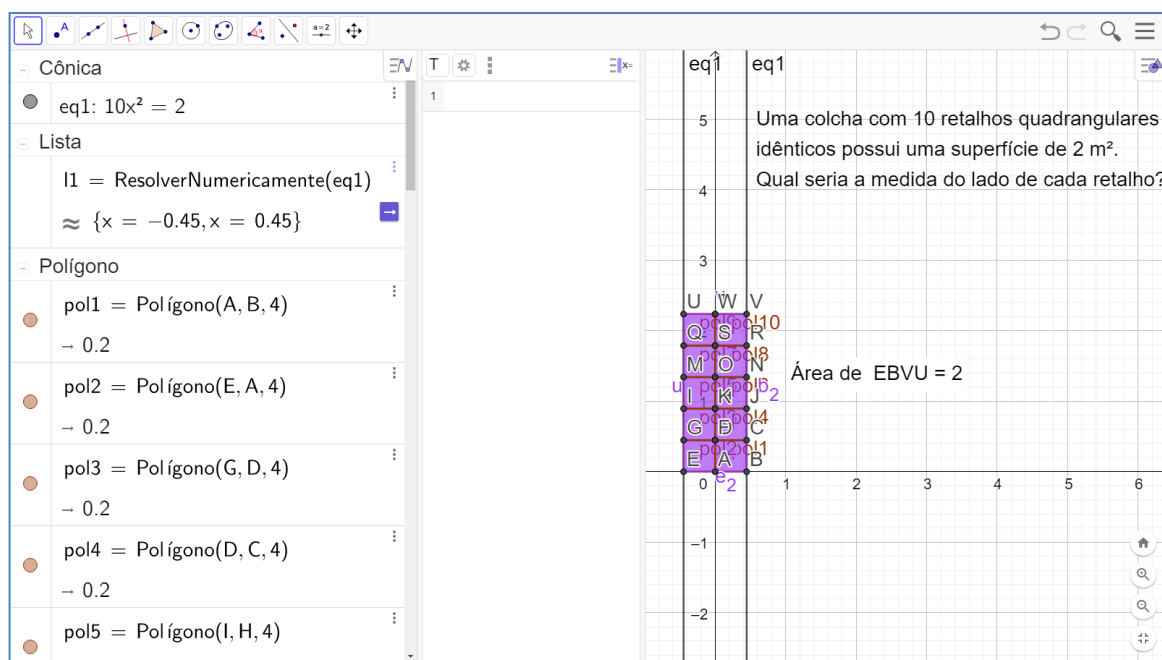
FIGURA 82: Tarefa 3 realizada pela Dupla 5.

Fonte: Elaboração dos estudantes no GeoGebra

Quando analisadas as subcategorias, a Dupla 5 não conseguiu extrair os dados, determinar as condições e definir os objetivos do problema. Na segunda categoria, os estudantes demonstraram saber determinar a incógnita nomeada de x , porém, construíram o modelo matemático $x^2 = 2$ sem considerar que se trata de 10 retalhos acarretando a não realização das análises das unidades.

Na terceira categoria, os membros da Dupla 5 utilizaram o comando “ResolverNumericamente” para solucionar o modelo matemático e não conseguiram solucionar o modelo matemático, pois encontraram como solução $x = 1,41$. Na quarta categoria, os estudantes acabaram interpretando o resultado construindo um polígono que representa um dos retalhos utilizando as retas perpendiculares ao eixo x formadas a partir da equação $x^2 = 2$. A Dupla 5 não conseguiu cumprir todas as ações da ASPM, porém, conseguiram reproduzir as habilidades desenvolvidas pelo GeoGebra.

A Dupla 6 conseguiu completar a Tarefa 3 utilizando os mesmos comandos “Inserir Texto”, “Polígono”, “Área” e “ResolverNumericamente”. A Dupla 6 cumpriu com êxito as etapas da ASPM, pois compreendeu o problema, elaborou o modelo $10x^2 = 2$ e realizou a interpretação da solução, mostrando que a soma das áreas dos quadriláteros somava 2 m^2 e apesar de abrir a janela CAS não utilizaram. A figura a seguir mostra a resolução da Tarefa 3 realizada pela Dupla 6 no GeoGebra.

FIGURA 83: Tarefa 3 realizada pela Dupla 6.

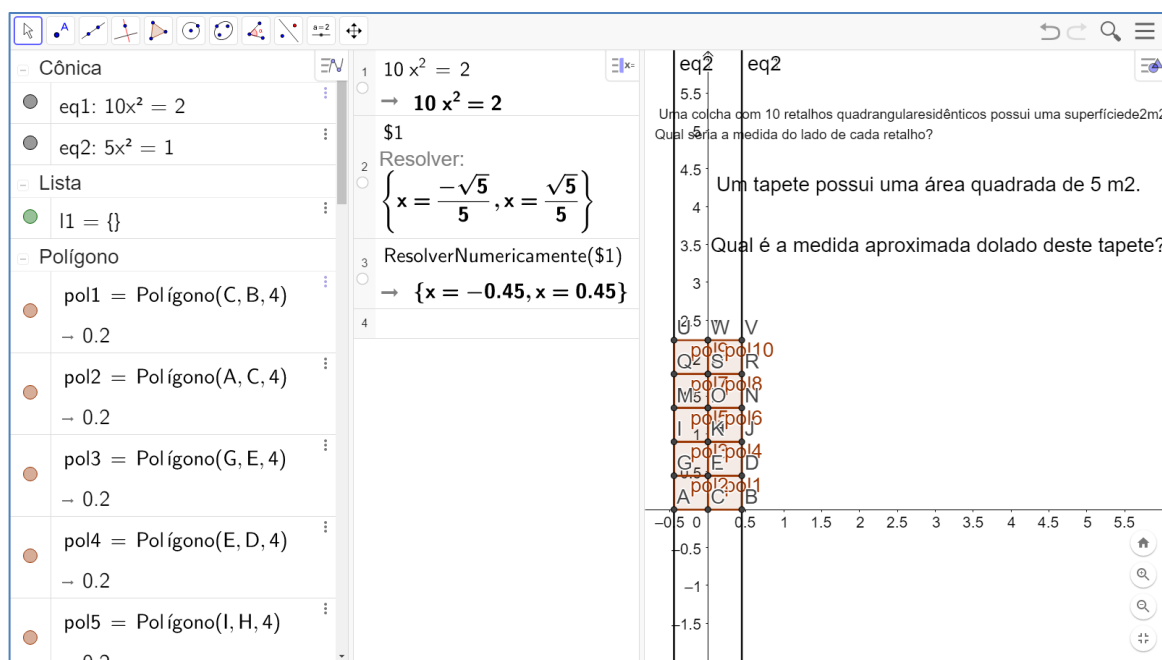
Fonte: Elaboração dos estudantes no GeoGebra

Quando analisadas as subcategorias, a Dupla 6 conseguiu extrair os dados, determinar as condições e definir os objetivos do problema. Na segunda categoria, os estudantes demonstraram saber determinar a incógnita nomeada de x e construíram o modelo matemático $10x^2 = 2$. Consideraram os 10 retalhos corretamente na realização das análises das unidades.

Na terceira categoria, os membros da Dupla 6 utilizaram o comando “ResolverNumericamente” para solucionar o modelo matemático e conseguiram solucionar o modelo matemático, pois encontraram como solução $x = 0,45$. Na quarta categoria, os estudantes acabaram interpretando o resultado construindo os 10 polígonos que representaram toda a colcha de retalhos utilizando as retas perpendiculares ao eixo x formadas a partir da equação $10x^2 = 2$ e, por fim, mostraram a sua área total. A Dupla 6 conseguiu cumprir todas as ações da ASPM e demonstraram as habilidades desenvolvidas no GeoGebra.

A Dupla 7 conseguiu realizar todos os comandos no GeoGebra utilizando a janela de álgebra, a janela CAS e a janela de visualização e cumpriram todas as ações da ASPM. A figura a seguir mostra a resolução da Tarefa 3 realizada pela Dupla 7 no GeoGebra.

FIGURA 84: Tarefa 3 realizada pela Dupla 7.



Fonte: Elaboração dos estudantes no GeoGebra

Ainda simplificação a equação eq1: $10x^2 = 2$ em eq2: $5x^2 = 1$. A resolução do modelo foi realizada na janela CAS com os comandos “Resolver”, que mostra a solução racionalizada e “ResolverNumericamente”, que mostra a solução racional. Como os estudantes não abriram um arquivo novo, o problema da Tarefa 1 ainda contava na janela de visualização.

Quando analisadas as subcategorias, a Dupla 7 conseguiu extrair os dados, determinar as condições e definir os objetivos do problema. Na segunda categoria, os estudantes demonstraram saber determinar a incógnita nomeada de x e construíram o modelo matemático $10x^2 = 2$ e sua forma simplificada $5x^2 = 1$. Consideraram os 10 retalhos corretamente na realização das análises das unidades.

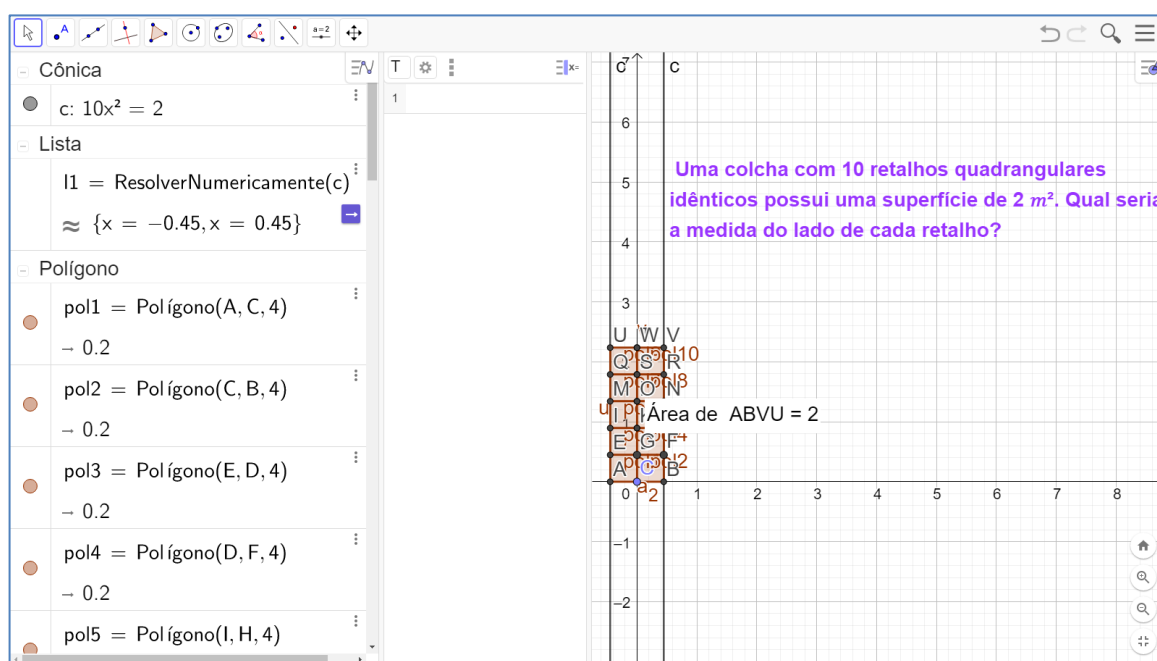
Na terceira categoria, os membros da Dupla 7 utilizaram o comando “ResolverNumericamente” na janela CAS para solucionar o modelo matemático e conseguiram solucionar o modelo matemático, pois encontram como solução $x = 0,45$ e por meio do comando “Resolver” encontraram $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Na quarta categoria, os estudantes interpretaram o resultado construindo os 10 polígonos que representaram toda a colcha de retalhos utilizando as retas perpendiculares ao eixo x formadas a partir da equação $5x^2 = 1$, mas, não mostraram

a sua área total. A Dupla 7 conseguiu cumprir todas as ações da ASPM e demonstraram as habilidades desenvolvidas no GeoGebra.

A Dupla 8 conseguiu realizar todos os comandos no GeoGebra utilizando a janela de álgebra e a janela de visualização, mas, não utilizaram a janela CAS. A dupla cumpriu todas as ações da ASPM. A resolução do modelo foi realizada na janela de álgebra com o comando “ResolverNumericamente”, que mostra a solução racional. A figura a seguir mostra a resolução da Tarefa 3 realizada pela Dupla 8 no GeoGebra.

FIGURA 85: Tarefa 3 realizada pela Dupla 8.



Fonte: Elaboração dos estudantes no GeoGebra

Quando analisadas as subcategorias, a Dupla 8 conseguiu extrair os dados, determinar as condições e definir os objetivos do problema. Na segunda categoria, os estudantes demonstraram saber determinar a incógnita nomeada de x e construíram o modelo matemático $10x^2 = 2$. Consideraram os 10 retalhos corretamente na realização das análises das unidades.

Na terceira categoria, a Dupla 8 utilizou o comando “ResolverNumericamente” na janela de álgebra para solucionar o modelo matemático e conseguiu solucionar o modelo matemático, pois encontraram como solução $x = 0,45$. Na quarta categoria, os estudantes interpretam o resultado construindo os 10 polígonos que representam toda a colcha de retalhos utilizando as retas perpendiculares ao eixo x formadas a partir da equação $10x^2 = 2$ e mostram a sua área total igual a 2. A Dupla 8 conseguiu

cumprir todas as ações da ASPM e demonstrou as habilidades desenvolvidas no GeoGebra.

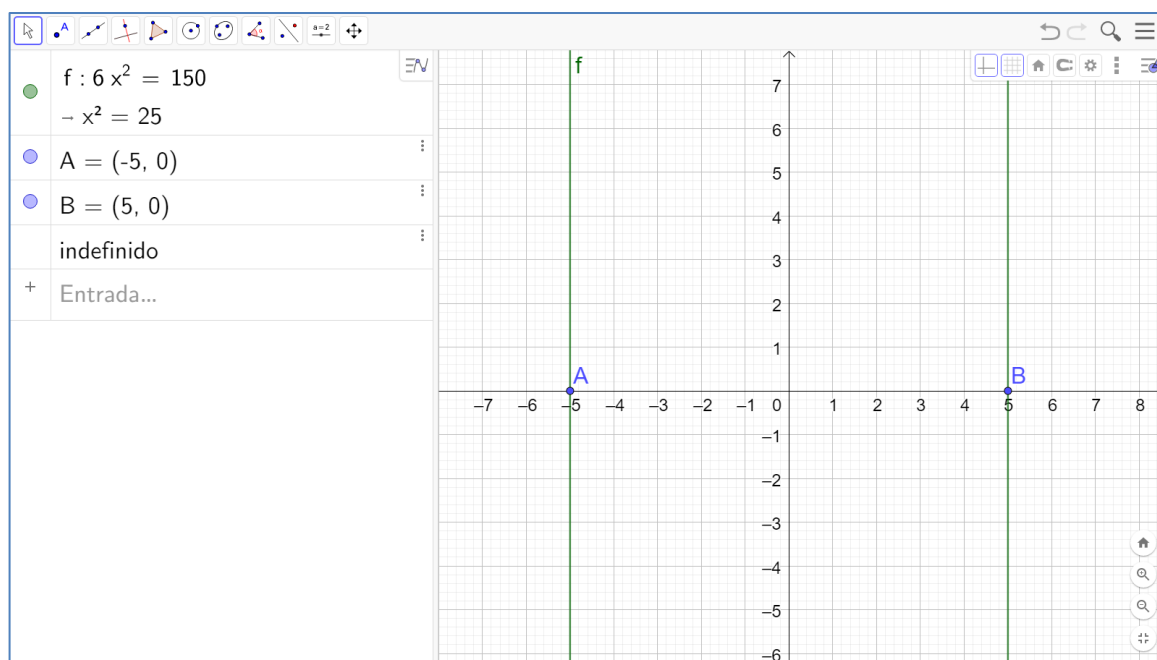
Diante das categorias analisadas relativas à Tarefa 3, a dupla começou a se enquadrar no caráter generalizado para as etapas material, verbal externa e interna, explanado de forma detalhada nas etapas material e verbal externa e de forma independente. A assimilação das duplas ao realizarem as ações e operações obteve razoável grau de consciência, solidez e racionalidade.

4.2.4 Análise qualitativa sobre a Tarefa 4

Para realizar a análise qualitativa da atividade realizada a partir da Tarefa 4, foi utilizado o Guia de observação das categorias da ASPM. Dos alunos participantes, apenas as Duplas 2, 6, 8 e 9 conseguiram finalizar a Tarefa 4. O texto da situação problema da Tarefa 4 também sofreu alterações ao ser inserida na SD para contextualizar a situação problema.

A pergunta realizada de forma simplificada foi: “Determine o lado de um quadrado que é face de um cubo que possui superfície total medindo 150 cm^2 .” Este problema apresenta um grau elevado de complexidade se comparado aos problemas anteriores e o professor pesquisador não auxiliou os alunos sobre comandos dos ícones no GeoGebra nesta tarefa.

A Dupla 2 conseguiu completar a Tarefa 4 inserindo a equação na janela de álgebra e fixando os pontos $A = (-5, 0)$ e $B = (5, 0)$. A Dupla 2 realizou apenas as etapas de compreensão e elaboração do modelo matemática da ASPM, porém, não resolveu o modelo e não interpretou a solução. A figura a seguir mostra a resolução da Tarefa 4 realizada pela Dupla 2 no GeoGebra.

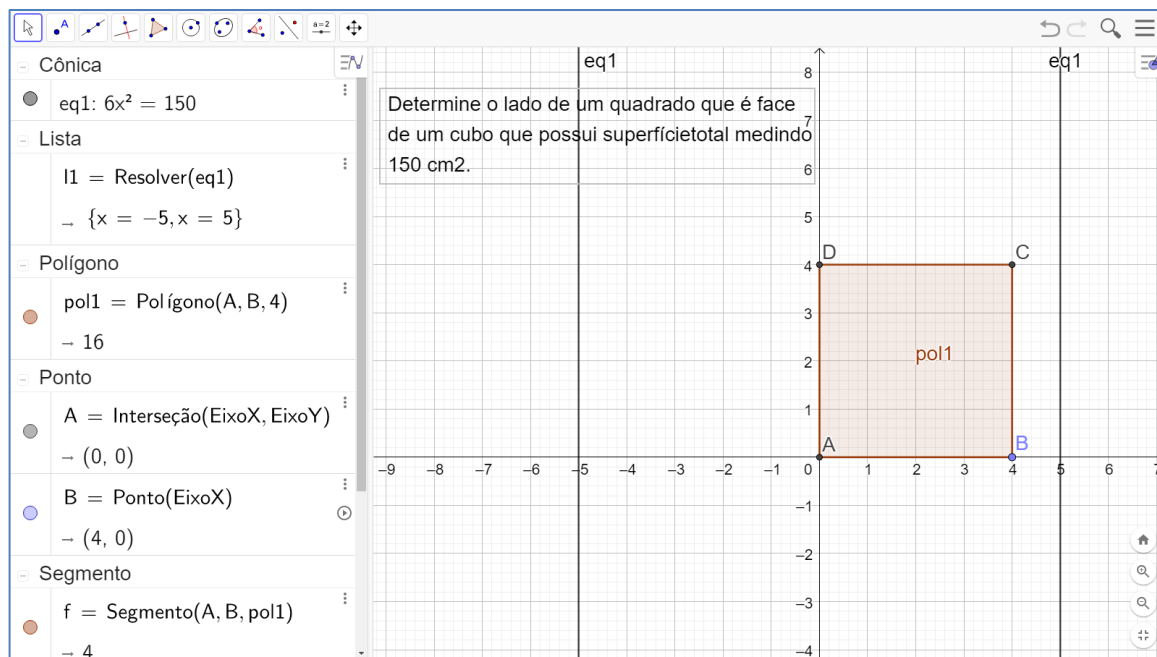
FIGURA 86: Tarefa 4 realizada pela Dupla 2.

Fonte: Elaboração dos estudantes no GeoGebra

Ao analisar as subcategorias, a Dupla 2 conseguiu extrair os dados, determinar as condições e definir os objetivos do problema. Na segunda categoria, os estudantes demonstraram saber determinar a incógnita nomeada de x e construíram o modelo matemático $6x^2 = 150$, em que, consideraram as 6 faces do cubo na realização das análises das unidades.

Na terceira categoria, a Dupla 2 não conseguiu solucionar o modelo matemático, apesar dos pontos A e B mostrarem as possíveis soluções por meio da interseção entre as retas que são perpendiculares ao eixo x , formadas a partir da equação $6x^2 = 150$. Na quarta categoria, os estudantes não interpretaram o resultado. Dessa forma, a Dupla 2 não conseguiu cumprir todas as ações da ASPM, seja por conta da sua complexidade seja por conta da inserção de um novo objeto no problema, o cubo.

A Dupla 6 conseguiu completar a Tarefa 4 utilizando os comandos “Inserir Texto”, “Polígono”, “Área” e “Resolver”. Realizaram as etapas da ASPM, pois a dupla compreendeu o problema, elaborou o modelo $6x^2 = 150$, porém, não realizou a interpretação da solução. A figura a seguir mostra a resolução da Tarefa 4 realizada pela Dupla 6 no GeoGebra.

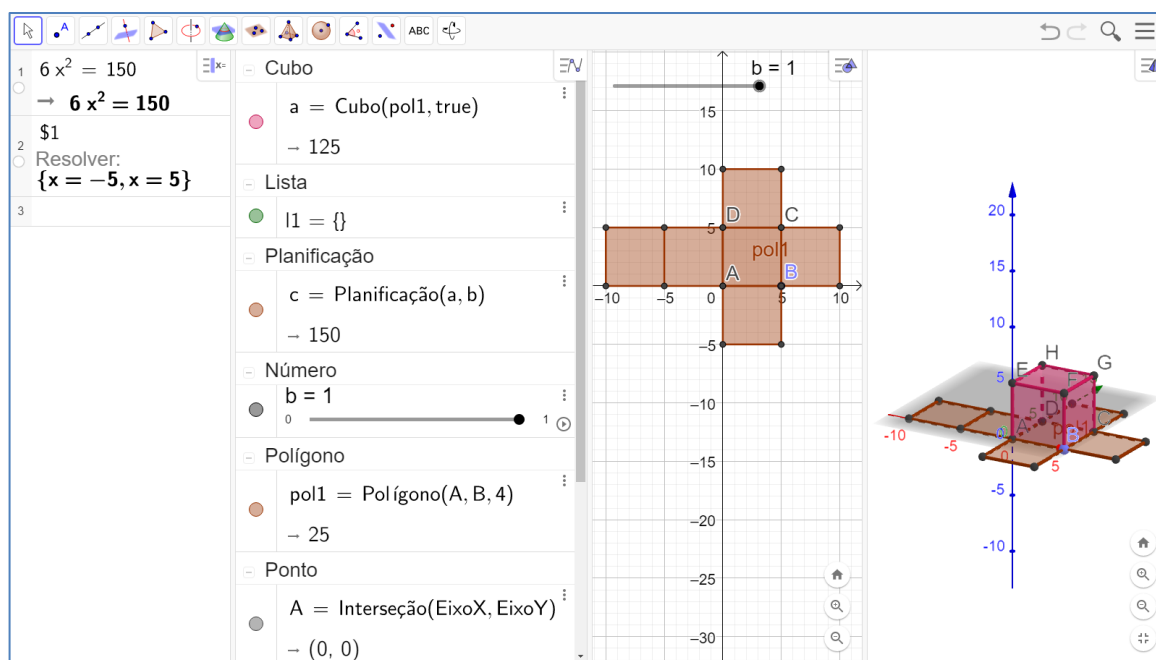
FIGURA 87: Tarefa 4 realizada pela Dupla 6.

Fonte: Elaboração dos estudantes no GeoGebra

Ao analisar as subcategorias, a Dupla 6 conseguiu extrair os dados, determinar as condições e definir os objetivos do problema. Na segunda categoria, os estudantes demonstraram saber determinar a incógnita nomeada de x , construíram o modelo matemático $6x^2 = 150$ e consideraram as 6 faces do cubo na realização das análises das unidades.

Na terceira categoria, a Dupla 6 conseguiu solucionar o modelo matemático e resolver o modelo utilizando o comando “Resolver” e encontrando como solução $x = 5$. Na quarta categoria, os estudantes não interpretaram o resultado, apesar estarem expostas na janela 2D, as interseções entre as retas que são perpendiculares ao eixo x , formadas a partir da equação $6x^2 = 150$ e a construção de um polígono. Dessa forma, a Dupla 6 não conseguiu cumprir todas as ações da ASPM, de certa forma por conta da interpretação da solução.

A Dupla 8 conseguiu realizar todos os comandos no GeoGebra utilizando as janelas de álgebra, CAS, visualização 2D e visualização 3D. A Dupla 8 cumpriu todas as ações da ASPM. A figura a seguir mostra a resolução da Tarefa 4 realizada pela Dupla 8 no GeoGebra.

FIGURA 88: Tarefa 4 realizada pela Dupla 8.

Fonte: Elaboração dos estudantes no GeoGebra

A Dupla 8 conseguiu completar a Tarefa 4 utilizando os mesmos comandos “Cubo”, em que se verificou o volume de 125; “Planificação”, em que se verificou a área total da superfície planificada e “Resolver” para resolução do modelo, que foi realizada na janela CAS.

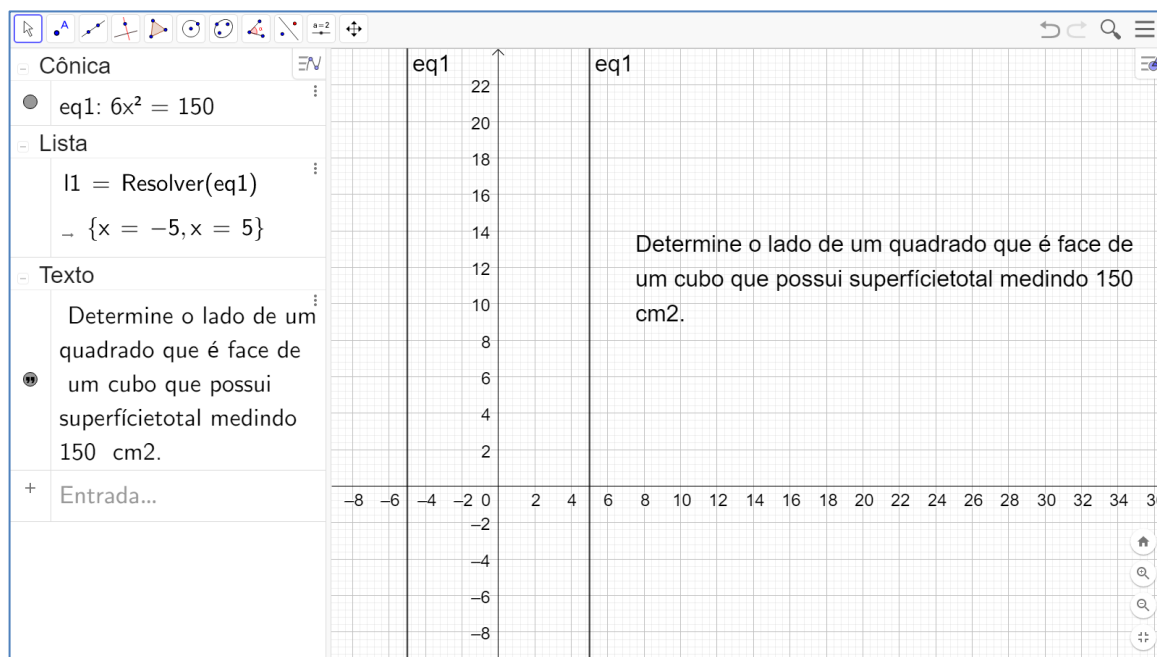
Ao analisar as subcategorias, a Dupla 8 conseguiu extrair os dados, determinar as condições e definir os objetivos do problema. Na segunda categoria, os estudantes demonstraram saber determinar a incógnita nomeada de x , construíram o modelo matemático $6x^2 = 150$ e consideraram as 6 faces do cubo na realização das análises das unidades.

Na terceira categoria, a Dupla 8 conseguiu solucionar o modelo matemático e resolver o modelo utilizando o comando “Resolver” na janela CAS e encontrando como solução $x = 5$. Na quarta categoria, os estudantes interpretam o resultado utilizando as janelas 2D e 3D. Dessa forma, a Dupla 8 conseguiu cumprir todas as ações da ASPM e demonstrou as habilidades desenvolvidas no GeoGebra, pois utilizou as quatro janelas possíveis, dados seus conhecimentos limitados sobre o *software*.

A Dupla 9, assim como a Dupla 2, inseriram a equação na janela de álgebra. Realizaram as etapas de compreensão, elaboração do modelo matemática da ASPM,

e resolveram o modelo, porém, não interpretaram a solução. A figura a seguir mostra a resolução da Tarefa 4 realizada pela Dupla 9 no GeoGebra.

FIGURA 89: Tarefa 4 realizada pela Dupla 9.



Fonte: Elaboração dos estudantes no GeoGebra

A Dupla 9 conseguiu completar a Tarefa 4 utilizando os mesmos comandos “Inserir Texto” e “Resolver”. Realizaram as etapas da ASPM, pois a dupla compreendeu o problema, elaborou o modelo $6x^2 = 150$, porém, não realizou a interpretação da solução.

Ao analisar as subcategorias, a Dupla 9 conseguiu extrair os dados, determinar as condições e definir os objetivos do problema. Na segunda categoria, os estudantes demonstraram saber determinar a incógnita nomeada de x , construíram o modelo matemático $6x^2 = 150$ e consideraram as 6 faces do cubo na realização das análises das unidades.

Na terceira categoria, a Dupla 9 conseguiu solucionar o modelo matemático e resolver o modelo utilizando o comando “Resolver” na janela de álgebra e encontrando como solução $x = 5$. Na quarta categoria, os estudantes não conseguiram interpretar o resultado, podendo ter utilizado as janelas 2D e 3D como a Dupla 8. Dessa forma, a Dupla 9 não conseguiu cumprir todas as ações da ASPM.

Diante das categorias analisadas relativas à Tarefa 4, as duplas se enquadram no caráter generalizado para as etapas material, verbal externa e interna, explanado de forma pouco detalhada nas etapas material e verbal interna e, demonstraram um caráter de independência.

A assimilação das Duplas ao realizarem as ações e operações se mostrou pouco consciente, mas com alto grau de solidez e racionalidade. “Para obter habilidades sólidas ou o hábito por um período longo de tempo é necessário garantir que as ações dirigidas aos objetos passem da forma material à forma mental com alto grau de generalização e de automatização.” (DELGADO; MENDOZA, 2016, p. 376). Na seção a seguir, são apresentados os resultados sobre a avaliação final que abarca a Tarefa 0, problema inicial.

4.3 RESULTADOS DA AVALIAÇÃO FINAL

Para realizar a análise qualitativa da atividade realizada a partir da Tarefa 0 como avaliação final, foi utilizado o Guia de observação das categorias da TFEAM e da ASPM. E, dentre as duplas participantes, apenas as Duplas 1, 3, 4 e 5 conseguiram finalizar a Tarefa 0. O texto da situação problema da Tarefa 0 sofreu algumas alterações ao ser inserida na SD.

Tarefa 0 (Problema inicial): Um terreno tem um formato quadrangular com 40 m de lado. O dono do terreno precisa fazer uma alteração para que ele passe a ter apenas 1200 m^2 de área. Para isso, achou viável reduzir a largura e aumentar o comprimento na mesma medida. A Figura 74 ilustra a situação problema.

- a) Escreva uma equação que represente a situação problema.
- b) Utilizando a propriedade distributiva, desenvolva a equação.
- c) É possível encontrar uma equação equivalente a essa na forma $x^2 = b$, onde b é um número real?
- d) Quais são os valores para x ?

Após a aplicação da avaliação formativa os alunos devem ser capazes de resolver e elaborar problemas por equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$. Portanto, os alunos devem ser capazes de utilizar os comandos do GeoGebra e resolver a ASPM sobre a Tarefa 0.

A Tarefa 0 visa garantir que os alunos compreendam, executem e expliquem as ações e operações da ASPM no GeoGebra ao lidar com questões de forma independente. Portanto, o objetivo desta avaliação final é demonstrar o efetivo desenvolvimento das habilidades.

A situação problema da Tarefa 0 apresenta um grau elevado de complexidade, em que o professor pesquisador não auxiliou os alunos sobre comandos dos ícones no GeoGebra e dicas para resolução do problema. Da mesma forma, a proposição das tarefas apresentadas na seção 3.7 que são sugestões para o desenvolvimento da habilidade EF08MA09, podem servir como situações problema em uma SD, podendo ser alterada conforme os objetivos de ensino de cada professor.

A Dupla 1 conseguiu completar a Tarefa 0 inserindo a equação e a imagem da situação nos pontos A e B na janela de álgebra. Os estudantes realizaram as etapas de compreensão e elaboração do modelo matemática da ASPM, porém, não resolveram o modelo e tão pouco interpretaram a solução. A figura a seguir mostra a resolução da Tarefa 0 realizada pela Dupla 1 no GeoGebra.

FIGURA 90: Tarefa 0 realizada pela dupla 1.

Função

- $f(x) = (40 + x)(40 - x)$

Número

- $a = 40 \cdot 40$
- $- 1600$

Ponto

- $A = (-7, -5)$
- $B = (8, -5)$

Texto

Problema inicial: Um terreno tinha um formato quadrangular com 40 m de lado. O dono do terreno precisa fazer uma alteração para que ele passe a ter apenas 1200 m^2 de área. Para isso, achou viável reduzir a largura e aumentar o comprimento no mesmo valor. Observe o esquema que foi feito para atender o que se queria :

a) Escreva uma equação que represente a situação descrita.
 b) Utilizando a propriedade distributiva, desenvolva a equação.
 c) É possível encontrar uma equação equivalente a essa na forma $x^2=b$, onde b é um número real?
 d) Quais são os possíveis valores para x ?

Diagrama A: Um quadrado com lado 40 m.

Diagrama B: Um retângulo com largura 40 m e comprimento $40 + x$ m. O retângulo é dividido em um quadrado de lado 40 m e um retângulo de dimensões x m por $40 - x$ m.

Fonte: Elaboração dos estudantes no GeoGebra

A Dupla 1, quanto a análise das categorias relativas às ações mentais, quadrou-se no caráter pouco generalizado para as etapas material, generalizado para

verbal externa e interna. A explanação se traduziu de forma pouco detalhada nas etapas material e verbal interna e independente.

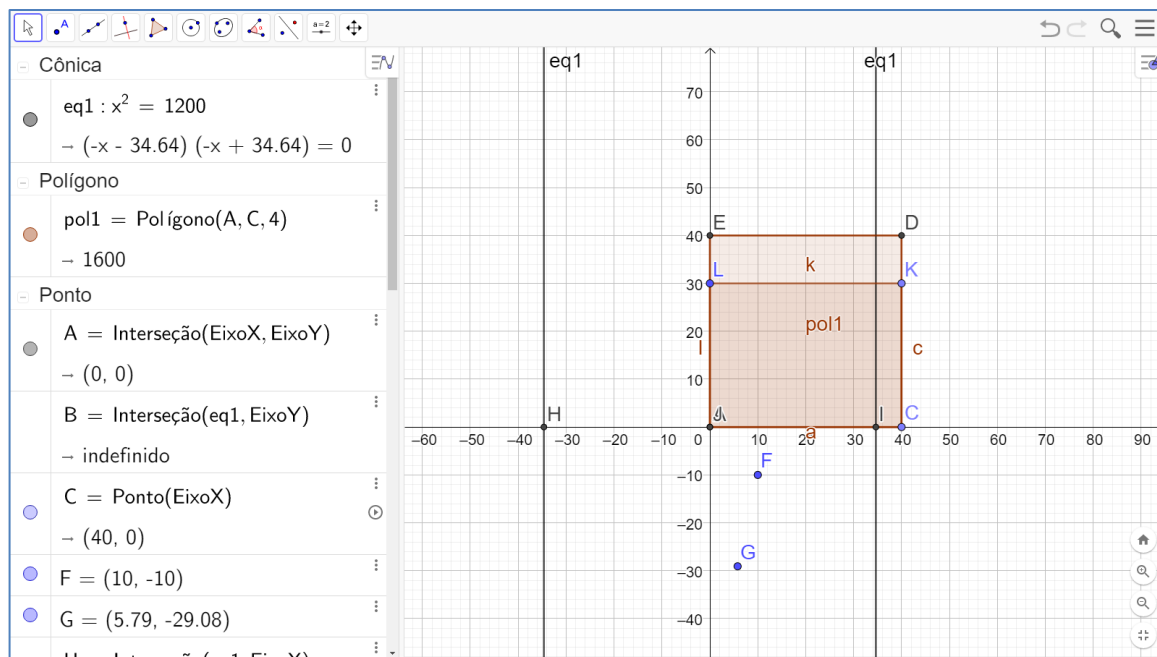
A assimilação da Dupla 1 ao realizarem as ações e operações se deu de forma pouco consciente, pouca solidez e pouca racionalidade, pois necessitaram da intervenção do pesquisador, principalmente com relação aos comandos do GeoGebra. No entanto, as ações mentais foram suficientes para o desenvolvimento da habilidade quando elaboram o modelo matemático utilizando o GeoGebra.

Ao analisar as subcategorias, a Dupla 1 não conseguiu extrair os dados, determinar as condições e definir os objetivos do problema. Os estudantes demonstraram saber determinar a incógnita nomeada de x , construíram o modelo matemático $(40 - x) \cdot (40 + x)$, apesar não constar como equação e sim uma função e realizam as análises das unidades.

Na terceira categoria, a Dupla 1 não conseguiu solucionar o modelo matemático. Na quarta categoria, os estudantes também não conseguiram interpretar o resultado, utilizando a janela 2D apenas para fixar as perguntas e a ilustração do problema. Dessa forma, a Dupla 1 não conseguiu cumprir todas as ações da ASPM.

A Dupla 3 não conseguiu completar a Tarefa 0, porém, inseriu a equação na janela de álgebra e os polígonos na janela 2D para ilustrar a situação problema. Percebe-se que não compreenderam o problema o que resultou na elaboração do modelo matemático $x^2 = 1200$ e, conseqüentemente, não resolveram o modelo.

Diante das categorias analisadas relativas à Tarefa 0, a Dupla 3 enquadrou-se no caráter não-generalizado para as etapas material, verbal externa e interna. A explanação foi de forma pouco detalhada nas etapas material e verbal interna e independência quanto à autonomia na realização da ASPM. A figura a seguir mostra a resolução da Tarefa 0 realizada pela Dupla 3 no GeoGebra.

FIGURA 91: Tarefa 0 realizada pela dupla 3.

Fonte: Elaboração dos estudantes no GeoGebra

A assimilação da Dupla 3 ao realizarem as ações e operações foi pouco consciente, com pouca solidez e pouca racionalidade, pois sem a intervenção do pesquisador não conseguiram executar a ASPM, mas, mostraram que desenvolveram habilidades quanto aos comandos do GeoGebra.

Todavia, as ações mentais foram suficientes para o desenvolvimento de habilidade com os comandos do GeoGebra, como “Polígonos” e “Ponto” para ilustrar a situação, o que diferencia esta dupla das demais que optaram por utilizar os comandos para inserir texto e imagem.

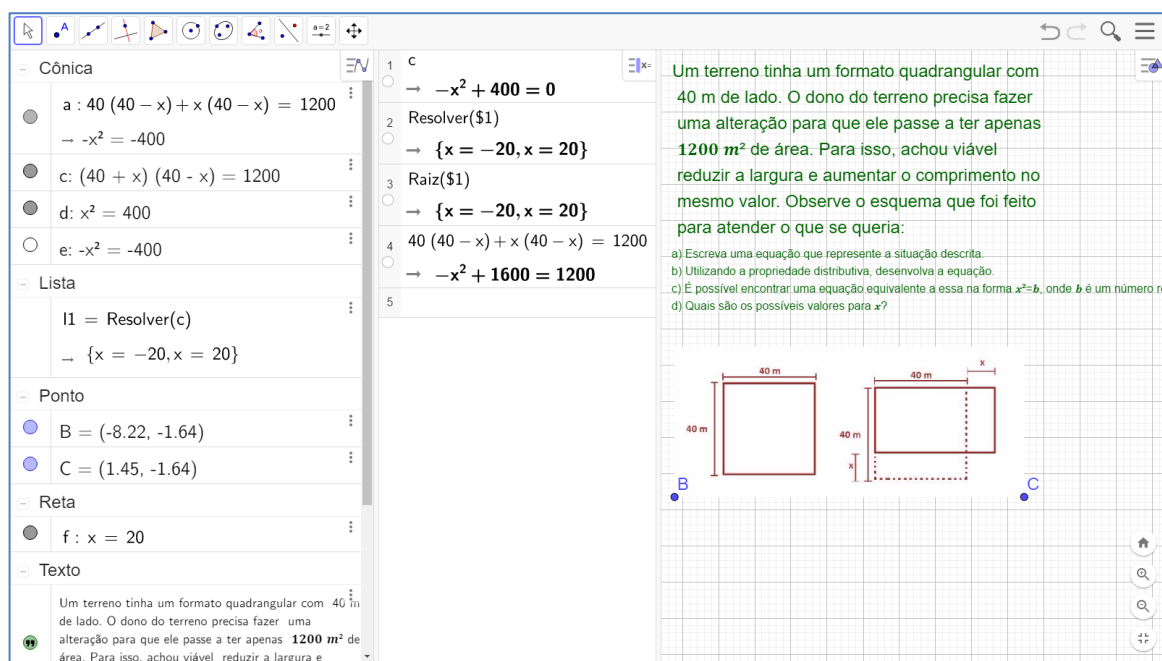
Ao analisar as subcategorias, a Dupla 3 não conseguiu extrair os dados, determinar as condições e definir os objetivos do problema. Os estudantes determinaram a incógnita nomeada de x, mas, construíram o modelo matemático $x^2 = 1200$, que não condiz com a equação que soluciona o problema.

Na terceira categoria, a Dupla 3 não conseguiu solucionar o modelo matemático. Na quarta categoria, os estudantes não conseguiram interpretar o resultado, embora tenham utilizado a janela 2D inserindo dois polígonos na tentativa de resolver o problema por tentativa de ilustrar o problema geometricamente. Dessa forma, a Dupla 3 não conseguiu cumprir as ações da ASPM.

A Dupla 4 foi a única dupla que conseguiu completar a Tarefa 0 com êxito inserindo a equação na janela de álgebra e CAS e, a imagem e o texto na janela 2D para ilustrar a situação problema cumprindo todas as etapas da ASPM. Percebeu-se que compreenderam o problema, pois elaboraram o modelo matemático $40 \cdot (40 - x) + x \cdot (40 - x) = 1200$ para utilizar a propriedade distributiva resultando na equação $x^2 = 400$ representando a situação problema que é equivalente a forma $x^2 = b$, em que $b = 400$. Também encontraram os possíveis valores para x .

Diante das categorias analisadas relativas à Tarefa 0, a Dupla 4 enquadrou-se no caráter não-generalizado para as etapas material, verbal externa e interna. A explanação foi de forma pouco detalhada nas etapas material e verbal interna e independência quanto à autonomia na realização da ASPM. A figura a seguir mostra a resolução da Tarefa 0 realizada pela Dupla 4 no GeoGebra.

FIGURA 92: Tarefa 0 realizada pela dupla 4.



Fonte: Elaboração dos estudantes no GeoGebra

A assimilação da Dupla 4 ao realizarem as ações e operações foi consciente e com alta solidez e racionalidade. Pois, mesmo sem a intervenção do pesquisador, os alunos conseguiram executar todas as etapas da ASPM, mostrando que desenvolveram habilidades sobre equações do tipo $ax^2 = b$ e sobre o GeoGebra.

Ao desenvolverem as habilidades com os comandos do GeoGebra, como "Texto", "Resolver" e "Raíz" nas janelas de álgebra, CAS e 2D cumpriram todas as

ações e operações possíveis para o grau de conhecimento sobre o GeoGebra. O que diferencia esta dupla das demais está no fato de utilizarem a janela CAS para realizarem os cálculos algébricos.

Ao analisar as subcategorias, a Dupla 4 conseguiu extrair os dados, determinar as condições e definir os objetivos do problema. Os estudantes determinaram a incógnita nomeada de x construíram dois modelos matemáticos $40 \cdot (40 - x) + x \cdot (40 - x) = 1200$ e $(40 - x) \cdot (40 + x) = 1200$, que resultam numa mesma equação $x^2 = 400$ e realizam as análises das unidades.

Na terceira categoria, a Dupla 4 conseguiu solucionar o modelo matemático. Na quarta categoria, os estudantes não interpretaram o resultado, contudo, responderam a todos os itens da situação problema e utilizaram a janela 2D para inserir os textos e a figura que ilustra o problema. Dessa forma, a Dupla 4 conseguiu cumprir as ações da ASPM.

A Dupla 5 conseguiu completar a Tarefa 0, porém, não inseriu a equação na janela de álgebra, pois, mesmo utilizando a janela CAS, faltou igualar a expressão $(40 - x) \cdot (40 + x)$ a 1200. Percebeu-se que não compreenderam o problema o que resultou na elaboração do modelo matemático $-x^2 + 1600$ e não resolveram por não ser uma equação.

FIGURA 93: Tarefa 0 realizada pela dupla 5.

The screenshot displays the GeoGebra software interface. On the left, the 'Algebra' view shows a list of objects: a point A at (-6, -3), a point B at (5.04, -3.05), and an input field for an equation. The 'Input' field contains the text 'Entrada...'. The 'CAS' (Computer Algebra System) view shows the following steps:

- $x + x \rightarrow 2x$
- $(40 - x)(40 + x) \rightarrow -x^2 + 1600$
-

The main workspace contains a text description of the problem and a diagram. The text reads: 'Um terreno tinha um formato quadrangular com 40 m de lado. O dono do terreno precisa fazer uma alteração para que ele passe a ter apenas 1200 m² de área. Para isso, achou viável reduzir a largura e aumentar o comprimento no mesmo valor. Observe o esquema que foi feito para atender o que se queria:'. The diagram shows two rectangles. The first rectangle is a square with side lengths of 40 m. The second rectangle is a rectangle with a width of 40 m and a height of x m. The area of the second rectangle is labeled as 1200 m².

Below the diagram, the following questions are listed:

- Escreva uma equação que represente a situação descrita.
- Utilizando a propriedade distributiva, desenvolva a equação.
- É possível encontrar uma equação equivalente a essa na forma $x^2 = b$, onde b é um número real?
- Quais são os possíveis valores para x ?

Fonte: Elaboração dos estudantes no GeoGebra

Ao analisar as categorias das ações mentais relativas à Tarefa 0, a Dupla 5 mostrou um caráter não-generalizado para as etapas material e verbal interna. A explanação da dupla foi pouco detalhada nas etapas material e verbal interna e foi compartilhada quanto à autonomia na realização da ASPM. A figura a seguir mostra a resolução da Tarefa 0 realizada pela Dupla 5 no GeoGebra.

A assimilação da Dupla 5 ao realizarem as ações e operações, assim como a dupla 3, foi pouco consciente, com pouca solidez e pouca racionalidade, pois sem a intervenção do pesquisador não conseguiram executar a ASPM. Contudo, as ações realizadas com os comandos do GeoGebra mostraram o desenvolvimento de habilidade, pois utilizaram os comandos para inserir texto e imagem.

Ao analisar as subcategorias, a Dupla 5 não conseguiu extrair os dados, determinar as condições e definir os objetivos do problema. Os estudantes demonstraram saber determinar a incógnita nomeada de x e construíram o modelo matemático $(40 - x) \cdot (40 + x)$, mas, não se trata de uma equação, pois nesse caso é apenas uma expressão na janela CAS e, também, não realizaram as análises das unidades.

Na terceira categoria, a Dupla 5 não conseguiu solucionar o modelo matemático. Na quarta categoria, os estudantes também não conseguiram interpretar o resultado, utilizando a janela 2D apenas para fixar as perguntas e a ilustração do problema. Dessa forma, a Dupla 5 não conseguiu cumprir as ações da ASPM.

Deste modo, a utilização do GeoGebra, por meio da ASPM como metodologia de ensino possibilitam o desenvolvimento de habilidades na resolução de problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ nos estudantes do 8º ano e, também, com os comandos da tecnologia utilizada.

Apesar de algumas duplas não alcançarem todas as categorias das ações da ASPM, Delgado e Mendoza (2016, p. 360) apontam que,

Isto se desenvolve no processo de aprendizagem, pelo que o processo de ensino tem uma influência decisiva no desenvolvimento geral do aprendiz. Os signos externos aparecem primeiro na forma material e logo se interiorizam fazendo-se ideais, também a linguagem percorre o processo de interiorização, ao princípio se utiliza para a comunicação com outras pessoas, atividade social, e mais tarde como atividade individual interna. Assim aparece primeira a atividade externa e através dela aparece a atividade interna.

A atividade mental integra os processos de orientação, execução e controle. O controle está intimamente relacionado ao feedback. A coleta de informações para feedback e correção, controlando também fazem parte do processo de assimilação e pode ser controlado por finalidade diagnóstica, formativa e final, ou seja, é a relação entre o que é controlado e o que deve ser controlado. (DELGADO; MENDOZA, 2016, p. 364).

Portanto, toda atividade deve ser retroalimentada, pois, mesmo com aplicação das ações, operações e objetivos bem definidos, não há garantias de assimilação e, conseqüentemente, para o desenvolvimento de habilidades. No entanto, as tecnologias podem facilitar a realização de tarefas, pois possibilitam a correção dos erros, tendem a tornar as aulas de matemática motivadoras.

4.4 SÍNTESE DOS RESULTADOS E AVALIAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

A pesquisa caracterizou-se pela utilização de métodos de análise dos dados obtidos no GeoGebra e das informações qualitativas obtidas por meio da aplicação de uma SD no desenvolvimento de habilidades. Também está caracterizada pelas observações das avaliações formativa e final. Por fim, evidencia-se a efetividade da teoria quanto ao emprego da ASPM sobre a habilidade EF08MA09 nas categorias da formação mental (assimilação).

A SD e o material didático foram elaborados para serem aplicados e contextualizados para estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental para o desenvolvimento da habilidade EF08MA09. Contudo, nada impede que o material didático e as sequências de tarefas sejam utilizadas para o desenvolvimento de outras habilidades matemáticas.

A SD permitirá que os alunos desenvolvam habilidades sobre o objeto de conhecimento por meio da observação, exploração e manipulação do GeoGebra na realização das ações e operações. Espera-se que a relação entre alunos e professores com tecnologias mobilizem, desafiem e motivem o desenvolvimento de competências e habilidades. A BNCC esclarece que,

Para o desenvolvimento das habilidades previstas para o Ensino Fundamental – Anos Finais, é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. [...] Da mesma forma que na

fase anterior, a aprendizagem em Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais também está intrinsecamente relacionada à apreensão de significados dos objetos matemáticos. Esses significados resultam das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos e seu cotidiano, entre eles e os diferentes temas matemáticos e, por fim, entre eles e os demais componentes curriculares. Nessa fase, precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação (BRASIL, 2018, p. 298).

Além disso, a matemática promove o desenvolvimento do pensamento computacional no aluno, pois trabalha a lógica, a linguagem algébrica, a utilização de algoritmos, modelagem matemática e suas representações. Estes são os principais fatores que facilitam a leitura e interpretação e auxiliam na construção de fluxogramas (etapas da resolução do problema).

O Produto Educacional produzido por esta pesquisa está direcionado a professores de matemática do 8º ano, no entanto, nada impede que professores de outras séries escolares da Educação Básica possam utilizá-lo. Entende-se que o PE é uma ferramenta de grande valia para o professor e que poderá enriquecer sua prática em sala de aula ou no ensino remoto.

Por meio desta pesquisa, esperamos que o PE elaborado possa auxiliar os professores de matemática na realização de atividades com objetivo de ensinar e aprender equação polinomial do 2º grau por meio do GeoGebra. Em que, por meio da realização de tarefas embasadas pela ASPM, os professores tenham a possibilidade de proporcionar aulas mais atrativas e significativas.

Também, identificar as facilidades e dificuldades dos estudantes no desenvolvimento das habilidades sobre equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ por meio de ASPM no GeoGebra com intuito de aprimorar a SD. Esperamos que os estudantes desenvolvam a habilidade EF08MA09 (BRASIL, 2018) com auxílio do GeoGebra.

O quadro 10 traz uma síntese dos resultados obtidos pela pesquisa dadas pelas observações e apreciação das tarefas e avaliações aplicadas. Destacamos também, as dificuldades enfrentadas durante a pesquisa e que poderão ser sanadas ou previstas durante a aplicação da SD pelo professor.

QUADRO 9: Síntese dos resultados.

MÉTODO	RESULTADOS OBTIDOS
Observações	Observamos que: Os estudantes conseguiram desenvolver as tarefas no GeoGebra sem dificuldades com ou sem auxílio do professor e mostraram ter facilidade ao utilizarem os comandos do GeoGebra. Resolveram os problemas utilizando todas as ferramentas apresentadas pelo pesquisador logo ao início da pesquisa, porém, não conseguiram elaborar problemas parecidos ou questionar sobre a modelagem dos problemas. Apenas alguns estudantes conseguiram corrigir as suas resoluções utilizando a ASPM. O engajamento dos estudantes é muito importante, pois alguns estudantes foram desanimando por conta dos computadores defasados e por estarem no quarto bimestre. Houve vários imprevistos como: computadores quebrando ao longo da pesquisa, alunos que queriam realizar as tarefas individualmente e Sistema Operacional dos computadores que não suportavam a instalação do GeoGebra.
Apreciação das Tarefas	As tarefas foram aplicadas de aos estudantes de forma satisfatória, pois utilizaram todas as ferramentas do GeoGebra apresentadas a eles, compreenderam as Tarefas, pois desenvolveram no GeoGebra o que se esperava; realizaram a maioria dos passos (comandos) corretamente e dominaram as ferramentas do GeoGebra.
Apreciação das avaliações	As avaliações formativas e final se deram pelo desenvolvimento das tarefas que compuseram a Sequência Didática no GeoGebra pelos estudantes para compreensão/assimilação da álgebra por equações do tipo $ax^2 = b$ utilizando a ASPM. Desse modo, os estudantes compreenderam os problemas, pois conseguiram construir o modelo matemático e resolveram o modelo e interpreta a solução. Na avaliação formativa, os estudantes conseguiram, em grande parte, atingir os objetivos da ASPM já na avaliação final os estudantes mostraram não compreender o problema, mas realizavam todas as etapas para a sua resolução.

Fonte: Elaboração do autor

De tal modo, é notório a eficácia na aplicação das atividades de situações problema, quando bem elaboradas e aplicadas com tecnologias, poderão auxiliar no desenvolvimento de habilidades. E, também, constatar o engajamento por parte dos estudantes quanto a utilização do GeoGebra e ao resolver problemas pela ASPM, pois, foi um fator determinante para trabalharmos construção do PE.

Entendemos que os resultados desta pesquisa contribuirão para o desenvolvimento de atividades com a temática álgebra no desenvolvimento da habilidade EF08MA09 com tecnologias (GeoGebra) no 8º ano do Ensino Fundamental. E que, poderá auxiliar professores de matemática no desenvolvimento de competências no ensino da álgebra com tecnologia.

A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados (BRASIL, 2018, p. 270).

Portanto, acreditamos que a pesquisa tenha relevância, pois, possibilitou a criação de um PE, consolidando o GeoGebra como uma tecnologia educacional importante para professores de matemática e estudantes em todos os níveis. Valorizando, assim, a aprendizagem por tecnologias digitais. E, da importância do planejamento de tarefas dirigidas pela ASPM e por ações mentais a serem “ativadas” por suas ações e operações.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Buscamos respostas para a questão que norteou toda a pesquisa ao analisar de que forma a utilização do GeoGebra, por meio da Atividade de Situações Problema como metodologia de ensino possibilita o desenvolvimento da habilidade de resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$?

Nesse sentido, o objetivo geral da pesquisa estabelecido para que pudéssemos chegar as respostas foi analisar as contribuições do GeoGebra no desenvolvimento da habilidade de resolver e elaborar problemas sobre equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ por meio da Atividade de Situações Problema.

A pesquisa também estava direcionada pelos objetivos específicos, em que se buscou analisar a contribuição do Esquema da Base Orientadora Completa da Ação da Atividade de Situações Problema em equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$; analisar a representação e resolução de equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ pelos estudantes no GeoGebra; identificar o nível de interação dos estudantes com o GeoGebra e identificar o desenvolvimento das habilidades nos estudantes ao resolver e elaborar equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ no GeoGebra.

Com o objeto de estudo estabelecido, demos início a análise dos dados obtidos na pesquisa por meio das duas categorias da ASPM. As categorias e etapas apresentadas, foram utilizadas a fim de responder à questão norteadora desta pesquisa, pois, tendem a mostrar evidências de assimilação e desenvolvimento de habilidades por parte dos estudantes.

Quanto às categorias da ASPM, foi realizada uma análise dos dados produzidos por meio das tarefas desenvolvidas no GeoGebra, relativas à habilidade a ser desenvolvida. Realizamos as análises de todas as tarefas que compõem avaliação formativa e da questão inicial tratada como avaliação final. Logo no início da pesquisa, foi apresentado aos participantes conceitos básicos do GeoGebra, pois toda a turma alegou não conhecerem o *software* e, também foi apresentada a questão inicial como motivação. Vale ressaltar que a avaliação diagnóstica não serviu como objeto de análise, mas teve como objetivo a identificação dos conhecimentos prévios dos alunos relacionados ao cálculo algébrico e foi realizada como sondagem sem fazer uso do GeoGebra para o registro.

Entendemos que no processo de resolução de problemas por meio de ASPM, o aluno deve compreender todos os processos que o permeiam. Para tanto, é necessário que o aluno faça a interpretação do problema, crie um modelo matemático que se adeque aos dados oferecidos no problema, resolva este modelo e, por fim, interprete o resultado.

Também se entende que todas as etapas da ASPM quando integrada a uma tecnologia digital (GeoGebra) facilitam a assimilação dos dados, proporcionando ao aluno o desenvolvimento de habilidades, tanto com a tecnologia utilizada quanto com equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

Assim sendo, ao analisar as categorias por meio do GeoGebra, percebemos que a tecnologia se mostrou como a mais adequada para a pesquisa, por ter janelas que interagem de forma dinâmica e ícones de comandos de fácil manuseio por parte dos estudantes. A utilização deste *software* de matemática cria possibilidades para uma metodologia inovadora para o professor contemporâneo. Planejar uma aula de matemática com a utilização de uma tecnologia digital é primordial para o ensino e aprendizagem. Todos estes fatores contribuem para a prática do professor em sala de aula.

Desse modo, o GeoGebra foi a tecnologia selecionada para que os estudantes utilizassem para resolver problemas. Pois, o GeoGebra possibilita interação entre suas janelas, visualização e manipulação dos objetos e exploração dos comandos para cálculos e análise dos resultados e, que proporciona aos alunos na assimilação dos conceitos de cálculos algébricos por interpretações geométricas.

Selecionamos o GeoGebra por se tratar de uma tecnologia de fácil manipulação e que atende aos objetivos. Portanto, foi desenvolvido um material didático contendo um breve tutorial do GeoGebra Classic 6, que apresenta janelas e ícones mais “atraentes” aos estudantes do Ensino Fundamental e uma sequência didática composta de cinco tarefas. O Problema inicial que foi apresentado aos participantes da pesquisa nos primeiros encontros foi intitulado “Tarefa 0”, do qual, se constituiu como avaliação final.

Por meio desta pesquisa foi possível desenvolvermos um produto educacional que utiliza o GeoGebra como tecnologia digital para explorar a resolução de equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$. Em que, por meio das tarefas a serem

realizadas com o GeoGebra os estudantes puderam desenvolver habilidades guiadas por ações e operações.

Assim, com os objetivos traçados foi possível encontrar alguns resultados que ajudaram a responder à questão norteadora da pesquisa. Para isso, foi necessário a elaboração de um material didático contendo um breve tutorial do GeoGebra Classic 6 e uma Sequência Didática. Além disso, foram desenvolvidas cinco sequências de tarefas opções para o professor destacando, assim, a importância da mediação do professor durante todo o processo.

O Produto Educacional, que é resultado desta pesquisa, foi elaborado seguindo as diretrizes preconizadas pela BNCC para a unidade temática de álgebra para o 8º ano do Ensino Fundamental. O objeto de conhecimento centrou-se na “Equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ ”, cuja habilidade a ser desenvolvidas pelos alunos está em “Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ ” (BRASIL, 2018, p. 312-313).

Desse modo, o Produto Educacional foi direcionado à uma turma de 32 alunos do 8º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual Monteiro Lobato, em Boa Vista/RR. Contudo, dos 32 alunos, alguns sinalizaram não querer participar da pesquisa. Para a aplicação do deste produto foi realizada uma intervenção com duração de 15 encontros, possibilitando assim, a produção de dados que foram sendo registrados no GeoGebra e salvos em mídias digitais. Todos os dados registrados foram das tarefas propostas.

As tarefas da SD contribuíram para a construção e assimilação de modelos e conceitos matemáticos da álgebra com apoio de conceitos de geometria, mais especificamente, cálculo de áreas de figuras planas e planificação de figuras espaciais. O GeoGebra vem como fator motivacional e fundamental para o desenvolvimento destas habilidades nos estudantes.

A escola em que foi realizada a pesquisa possuía um dos laboratórios com um bom quantitativo de computadores em funcionamento se comparado as outras escolas visitadas, mas, durante a realização da pesquisa alguns computadores começaram a apresentar defeitos. Desse modo, percebemos que para atender esta demanda, as escolas necessitam estar bem equipadas com computadores e com

sistemas operacionais atualizados e que suportem a instalação de *softwares* como o GeoGebra. Também notamos que a utilização do computador ou do GeoGebra, com todas as potencialidades que geram, não garantem o desenvolvimento de habilidades sem a intervenção do professor por meio do seu planejamento de atividades e tarefas bem elaboradas e direcionadas.

Deste modo, ao utilizar o GeoGebra em conjunto com uma sequência de tarefas quando bem planejada, pode proporcionar aos estudantes o desenvolvimento de habilidades tanto com a tecnologia quanto com a matemática. Acreditamos que o Produto Educacional resultante desta pesquisa servirá de apoio aos professores de matemática do 8º ano do Ensino Fundamental e, até mesmo de outras séries.

Ficou visível que os alunos ao usarem os recursos que o GeoGebra proporciona por meio dos seus ícones de comandos das janelas de álgebra, CAS, 2D e 3D tornou o trabalho de resolver o problema “mais fácil”. Pois, assimilam: os conceitos geométricos ao construírem as figuras, o conceito de equação quando montam o modelo matemático, a linguagem algébrica quando compreendem um problema que envolve a álgebra e cálculos aritméticos quando interpretam o problema.

As cinco sequências de tarefas, que também farão parte do Produto Educacional, são indicadas como alternativas para a elaboração de uma nova sequência didática dependendo dos objetivos de cada professor ao utilizar o PE. De tal modo, advertimos que o professor, ao intermediar suas metodologias envolvendo o objeto de conhecimento (álgebra) e o GeoGebra, propicie momentos de aprendizagem (habilidades).

Assim, os conceitos algébricos quando estimulados por atividades de situações problema e incorporados a tecnologias digitais, podem propiciar um novo modo de encarar a álgebra. Colocando ao alcance dos professores novas possibilidades e, também, ao alcance das escolas que podem adotar o GeoGebra e outras tecnologias como parte do currículo. Acreditamos que o Produto Educacional proveniente desta pesquisa pode ser um material didático de referência no futuro das escolas no Brasil.

Por fim, a pesquisa permitiu reflexões acerca do ensino de álgebra no Ensino Fundamental Anos Finais e a inserção da tecnologia GeoGebra como potencializador no desenvolvimento de habilidades e de competências. As escolas do Brasil vêm

investindo em “educação computacional” desde os anos 1990, e esse tipo de iniciativa deve continuar sendo estimulada. Os projetos e as pesquisas desenvolvidos por professores-pesquisadores devem ser levados para a sala de aula a fim da melhoria do ensino e, principalmente, da matemática.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, F. E. L.; LIMA, A. P. A. B. Negociações do Contrato Didático na Passagem da Linguagem Natural para a Linguagem Algébrica e na Resolução da Equação no 8º Ano do Ensino Fundamental. **Zetetiké** – FE/Unicamp – v. 21, n. 39 – jan./jun. 2013.
- ARAÚJO, J. J. **Atividades exploratórias de Álgebra e Geometria com a utilização do software GeoGebra para a formação continuada de Professores de Matemática do Ensino Fundamental**. 2017. 47 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2017.
- ARAÚJO, L. C. L.; COSTA, J. C. **Aprendendo Matemática com o GeoGebra**. Nóbrega, São Paulo: Exato, 2010.
- ASSUNÇÃO, J. A. et al. Análise da Avaliação Diagnóstica da Estratégia de Situações Problemas em Expressões Algébricas. In: Patrick (Rick) Scott; Ángel Ruíz. (Org.). **Educación Matemática en las Américas 2015: Resolución de Problemas**. 1 ed. México: **Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)**, 2015, v. 15, p. 39-47.
- BADKE, W. C. **Mobilização de Saberes de Licenciandos ao Utilizarem o GeoGebra**. 2017. 110 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto Federal do Espírito Santo. Vitória, 2017.
- BARROS, A. P. R. M.; STIVAM, E. P. O Software GeoGebra na Concepção de Micromundo. **1ª. Conferência Latino-Americana de GeoGebra**. p.184-194, 2012.
- BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G. **O GeoGebra e a matemática da educação básica: frações, estatística, círculo e circunferência**. Curitiba: Ithala, 2014.
- BELTRAMI, R. S. **Algumas Técnicas Utilizando o Software GeoGebra no Processo de Resolução de Problemas Geométricos do Ensino Básico: Situações de Máximos e Mínimos e Lugares Geométricos**. 2016. 139 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Universidade Federal de Roraima. Boa Vista, 2016.
- BEZERRA, M. C. A.; ASSIS, C. C. Universidade Federal da Paraíba Atividades com o GeoGebra: possibilidades para o ensino e aprendizagem da Geometria no Fundamental. **XIII CIAEM – IACME**, Recife, Brasil, 2011.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 5 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2017.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Pesquisas em Informática e Educação Matemática**. In: Educação em Revista, Belo Horizonte, n. 36, p. 239-253, 2002.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: Sala de aula e internet em movimento**. 2. ed. 1ª reimp., Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2018.

BORGATO, K. C. **O ensino de produtos notáveis e fatoração de polinômios: uma articulação entre álgebra e geometria**. 2013. 149 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina. Londrina, 2013.

BRASIL, **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 12 jan. 2019.

BRASIL, Documento de área 2016. **Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES**. Disponível em: <http://avaliacaoquadrienal.capes.gov.br/documentos-de-area>. Acesso em: 10 mai. 2019.

BRASIL. PCN: Orientações curriculares para o ensino médio ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. **Secretaria da Educação Média e Tecnológica**. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª Séries): matemática**. Secretaria de Educação Fundamental, MEC/SEF. Brasília, 1998.

CARNEIRO, G. S. **Atividades Investigativas com o GeoGebra: Contribuições de uma Proposta para o Ensino de Matemática**. 2013. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Formação de Professores) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia. Jequié, 2013.

CHAVANTE, E. **Convergências Matemática**. Ensino fundamental anos finais: 8º ano. São Paulo: SM, 2016.

CHIRONE, A. R. R. **A aprendizagem de equações do 1º grau a partir da atividade de situações problema como metodologia de ensino, fundamentado na teoria de formação por etapas das ações mentais e conceitos de Galperin**. 2016. 130 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências) – Universidade Estadual de Roraima. Boa Vista, 2016.

COELHO, A. S. **O Ensino de Álgebra nos Livros Didáticos de 5ª a 8ª Séries, segundo a Proposta Curricular para Roraima (década de 1970)**. 2017. 77 f. Monografia (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Roraima, Boa Vista-RR, 2017.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de matemática. 1ª a 5ª séries. Para estudantes do curso Magistério e professores do 1º grau**. 12 ed. São Paulo: Ática, 2003.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Ática, 2003.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris Matemática: 9º ano – Ensino Fundamental Anos Finais**. 2 ed. São Paulo: Ática, 2015.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris Matemática: 8º ano – Ensino Fundamental Anos Finais**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

EDOCENTE. **Dicas para Planejar a Aula a partir do Livro Didático: Matemática**. infográfico. Disponível em: https://www.edocente.com.br/conteudos-para-download/?categoria_conteudo=&formato=infografico&s=. Acesso em: 05 jan. 2021.

FERRO, M. A. V. **Estudo de Conceitos de Álgebra com o Auxílio de Materiais Manipuláveis**. 2018. 98 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Franciscana. Santa Maria, 2018.

FREIRE, A. A. C. **O Uso do GeoGebra na Resolução de Problemas Matemáticos a partir da Teoria de Galperin**. 2016. 117 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências) – Universidade Estadual de Roraima. Boa Vista, 2015.

FREIRE, R. S.; CUNHA, A. R. O.; MAXIMIANO, R. C. P. Matemática, Lúdico e GeoGebra: Integração a Favor de Ensinos e Aprendizagens Diversas. **VI CIEM – Ulbra**. Canoas-RS, out. 2013.

GEOGEBRA, **Materiais didáticos**. Disponível em: <https://www.geogebra.org/materials>. Acesso em: 18 ago. 2018.

GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática: 8º ano Ensino Fundamental Anos Finais**. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

HOHENWARTER, M. Multiple representations and GeoGebra-based learning environments. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática (Unión)**. n 39. p. 11-18. Sep. 2014.

KENSKI, V. M. **Educação e Tecnologias: O novo ritmo da informação**. 5 ed. (Coleção Papirus Educação). Campinas, SP: Papirus, 2010.

KENSKI, V. M. Novas tecnologias: o redimensionamento do espaço e do tempo e os impactos no trabalho docente. **Revista Brasileira de Educação**. n. 08, p. 58-71, 1998.

KENSKI, V. M. **Tecnologias e ensino presencias e a distância**. Campinas: Papirus, 2003.

LEAL, R.S.C.; COSER, I. J. Projeto Novos Talentos - Capacitando Professores das Series Iniciais para o Ensino da Geometria com Auxílio do GeoGebra. **Seminário de Extensão e Inovação da UTFPR – 4º SEI-UTFPR – Campus Cornélio Procopio – PR**. 30 de Set. de 2014.

LEITE, J. S. **A atividade de situações problema em sistemas de equações lineares fundamentado em Galperin e Majmutov nos estudantes da 2ª série do ensino médio na Escola Estadual Tancredo Neves**. 2019. 103 f. Dissertação

(Mestrado Profissional em Ensino de Ciências) – Universidade Estadual de Roraima. Boa Vista, 2019.

LIMA, J. R. C. **Pensamento Algébrico no Currículo do Ciclo de Alfabetização: Estudo Comparativo de Duas Propostas**. 2018. 80 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universitária Católica de São Paulo. São Paulo, 2018.

LIMA, V. S. **Solução de Problemas: Habilidades Matemáticas, Flexibilidade de Pensamento e Criatividade**. 2001. s.n. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2001.

MAGALHÃES, A. G. **Construção de conceitos algébricos com alunos do 7º ano**. 2016. 13 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Centro Universitário Univates. Lajeado, 2016.

MALTEMPI, M. V. Construcionismo: pano de fundo para pesquisas em informática aplicada à educação matemática In: BICUDO, M. A. V.; M. C. BORBA (Orgs.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, p. 264-282, 2004.

MALTEMPI, M. V. Novas Tecnologias e Construção de Conhecimento: Reflexões e Perspectivas. In: **V Congresso Ibero-americano de Educação Matemática (CIBEM)**. Porto/Portugal, jul. 2005.

MARASINI, S. M.; GRANDO, N. I.; MORAIS, M. D. Educação Algébrica no Ensino Fundamental II: A Extensão Gerada pela Pesquisa. **II Encontro Nacional PIBID**. 2014.

MARQUES, A. B.; NÚÑEZ, I. B. Formação de Habilidades a partir da Teoria da Assimilação por Etapas Mentais de P. Ya. Galperin. **X CONPE**. Maringá, 2011.

MENDOZA, E. J. G.; ORTIZ, A. M.; MARTÍNEZ, J. M.; DELGADO, O. La teoría de la actividad de formación por etapas de las acciones mentales en la resolución de problemas. **Revista Inter Science Place**, Rio de Janeiro. ano 2, n. 9 set.-out., 2009a.

MENDOZA, H. J. G. **Estudio del efecto del sistema de acciones em el processo del aprendizaje de los estudiantes em la atividade de situaciones problema em matemática em la asignatura de álgebra lineal, em el contexto de la Faculdade Actual de la Amazônia**. 2009. 343 f. Tese (Doutorado em Psicopedagogia) – Universidade de Jaén (UJAEN), Espanha, 2009b.

MENDOZA, H. J. G.; DELGADO, O. Sistema de ações para melhorar o desempenho dos Alunos na Atividade de Situações Problema em Matemática. In: **XIII Conferência Interamericana De Ensino Da Matemática**, 2011, Recife. CD ROM ANAIS XIII CIAEM, 2011

MENDOZA, H. J. G.; DELGADO, O. T. **A Contribuição de Galperin na Avaliação de Provas de Lápis e Papel de Sistemas de Equações Lineares**. ano 6, Vol. XI, n. 2, p. 289-323. Jul-Dez, 2013.

MENDOZA, H. J. G.; DELGADO, O. T. Proposta de um Esquema da Base Orientadora Completa da Ação da Atividade de Situações Problema Discente. **Revista Obutchénie**, v. 4, p. 180-200, 2020.

MENDOZA, H. J. G.; DELGADO, O. A Atividade de Situações Problema em Matemática. In: LONGAREZI, Andréa Maturano; PUENTES, Roberto Valdés. (Org.) **Ensino, aprendizagem e desenvolvimento: fundamentos psicológicos e didáticos para o ensino desenvolvimental**. 1 ed. Uberlândia: EDUFU, v. 1, p. 373-403, 2017.

MENDOZA, H. J. G.; DELGADO, O. A Contribuição de Galperin na Avaliação de Provas de Lápis e Papel de Sistemas de Equações Lineares. **Revista AMAzônica**, Manaus-AM, v. 11, n. 2, p. 289-323, 2013.

MENDOZA, H. J. G.; DELGADO, O. A Didática da Matemática Fundamentada na Teoria de Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin. In: Isauro Beltrán Núñez; Betânia Leite Ramalho. (Org.). **P. Ya. Galperin e a teoria da assimilação mental por etapas: Pesquisa e experiências para um ensino inovador**. 1. ed. Campinas: Mercado de Letras, v. 1, p.125-153, 2018.

MENDOZA, H. J. G.; DELGADO, O. D. Sistema de ações para melhorar o desempenho dos alunos na atividade de situações problema em matemática. **XIII CIAEM-IACME**, Recife-PE, Brasil, 2011.

MENDOZA, H. J. G.; DELGADO, O. Organización de la Actividad de Situaciones Problema en Matemática. **Revista Pedagógica Científica Atenas**, v. 3, n. 35, p. 31-36, Jul-Set, 2016.

MOREIRA, M. A. **Teorias de Aprendizagem**. 2 ed. Ampl. São Paulo: EPU, 2011.

MUSSATO, S. **A utilização de jogos educativos computadorizados como fator motivador nas aulas de Matemática**. 2006. 112 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil. Canoas, 2006.

MUSSATO, S. **Cyberformação com Professores de Matemática a Distância: Horizontes que Emergem de Diferentes Contextos Culturais**. 2015. 280 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil. Canoas, 2015.

NASCIMENTO, L. M. **A Utilização de Tecnologia para o Ensino de Estatística no Ensino Fundamental II: Uma proposta de aula com o suporte do Google Docs e do GeoGebra**. 2017. 88 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2017.

NASCIMENTO, V. F. F. A. et al. Contribuição da Atividade de Situações Problemas em Adição e Subtração como Objeto Educacional para Alunos do Ensino Fundamental. **Research, Society and Development**, v. 8, 2019, p. 10891264.

NOVA ESCOLA, **Planos de Aula**. Disponível em: <https://novaescola.org.br/>. Acesso em: 18 abr. 2019.

NÚÑEZ, I. B. RAMALHO, B. L. (Orgs.). O uso de situações-problema no ensino de ciências. In.: **Fundamentos do ensino-aprendizagem das Ciências Naturais e da Matemática: O Novo Ensino Médio**. Porto Alegre: Sulina, p. 145- 171, 2004.

NÚÑEZ, I. B. **Vygotsky, Leóntiev e Galperin: formação de conceitos e princípios didáticos**. Brasília: Liber Livro, 2009.

NÚÑEZ, I.B., PACHECO, O.G. **La Formación de Conceptos Científicos uma Perspectiva desde la Teoría de la Actividade**. Natal: EDUFRRN.1997.

OLIVEIRA, C. N. C.; FUGITA, F. **Geração Alpha Matemática**. Ensino fundamental anos finais: 8º ano. São Paulo: SM, 2017.

OLIVEIRA, E. S. S. Matemática e Informática: O GeoGebra como Recurso de Aprendizagem nas Séries Iniciais. **RAES - Revista Acadêmica Eletrônica**, v. 6, n. 2, Sumaré. 2011.

OLIVEIRA, S. C.; LAUDARES, J. B. Pensamento Algébrico: Uma relação entre Álgebra, Aritmética e Geometria. In: **VII Encontro Mineiro de Educação Matemática**, 2015, São João Del Rei. Práticas Educativas e Pesquisas em Educação Matemática. Juiz de Fora: UFSJ, v. 1, p. 1-12, 2015.

PAPERT, S. **A Máquina das Crianças**: Repensando a Escola na Era da Informática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

PAPERT, S. **Constructionism: a new opportunity for elementary science education**. Massachusetts Institute of Technology, The Epistemology and Learning Group. Proposta para a National Science Foundation, 1986a.

PAPERT, S. Education for the knowledge society: a Russia-oriented perspective on technology and school. **II TE Newsletter**. UNESCO, n. 1, jan.-mar. 2001.

PAPERT, S. **Logo: computadores e educação**. Tradução de José Armando Valente, Beatriz Bitelman. Afira V. Ripper. 2. ed. São Paulo: Brasiliense, 1986b.

PATARO, P. M.; BALESTRI, R. **Matemática essencial 8º ano**: ensino fundamental anos finais. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2018.

PAULOVICH, L. **Um Estudo sobre Formação de Conceitos Algébricos**. Bauru: Ciência & Educação. 1998.

PAZUCH, V. **Cyberformação semipresencial: A relação com o saber de professores que ensinam matemática**. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil – ULBRA, Canoas, 2014.

PEREIRA, J. E.; NÚÑEZ, I. B. **Formação da Habilidade de Interpretar Gráficos Cartesianos**: Contribuição da Teoria de P. Ya. Galperin. Natal-RN: EDUFRN, 2017.

PINTRO, A. L. Uso do software GeoGebra nas aulas de matemática do Ensino Fundamental II. **1ª. Conferência Latino-Americana de GeoGebra**, pp. CCXLI-CCXLIX, 2012.

POFFO, J. **Álgebra nos Anos Finais do Ensino Fundamental: Reflexões e Atividades Pedagógicas**. 2011. 249 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Regional de Blumenau. Blumenau, 2010.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1975.

POLYA, G. **A arte de Resolver Problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PRENSKY, M. **Nativos Digitais, Imigrantes Digitais**, MCB University Press, v. 9, n. 5, p.01-06, out. 2001. <https://www.marcprensky.com/writing/Prensky - Digital Natives, Digital Immigrants - Part1.pdf>. Acesso em: 10 de nov. 2018.

REZENDE, A.; VALDES, H. Galperin: Implicações Educacionais da Teoria de Formação das Ações Mentais por Estágios. **Educação e Sociedade**, Campinas-SP. v. 27, n. 97 p. 1205-1232, set./dez. 2006.

SAMPAIO, F. A. **Trilhas da matemática**: 8º ano – Ensino Fundamental Anos Finais. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2018.

SCALABRIN, A. M. M. O. **Geometria espacial com o software GeoGebra 3D: análise dos processos de ensinar e de aprender no ensino médio**. 2019. 185 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências) – Universidade Federal de Roraima. Boa Vista, 2019.

SILVA, G. B.; FELICETTI, V. L. Habilidades e competências na prática docente: perspectivas a partir de situações-problema. **Educação por escrito**. Porto Alegre-RS. v. 5, n. 1, p. 17-29, jan.-jun., 2014.

SILVA, G. M.; UTSUMI, M. C. O Uso do GeoGebra na Aprendizagem de Geometria Analítica no Ensino Médio. **Hipátia**, v. 2, n.1, p. 1-15, jun. 2017.

SOUZA, J. R. **Matemática realidade & tecnologia**: 8º ano – Ensino Fundamental Anos Finais. 1. ed. São Paulo: FTD, 2018.

TALÍZINA, N. **La teoría de la actividad de estudio como base de la didáctica en la educación superior**. México, DF: Universidad Autónoma Metropolitana, 1994.

TALÍZINA, N.F. **Fundamentos de la enseñanza en la Educación Superior**. La Habana: Edición ENPES, 1987.

TALÍZINA, Nina. **La teoría de la actividad aplicada a la enseñanza**. Trad. Yulia Solovieva y Luis Quintanar Rojas. México: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla: 2009.

DELGADO, O.; MENDOZA, H. J. G. Evolução da Teoria Histórico-Cultural de Vigotski à Teoria de Formação por Etapas das Ações Mentais de Galperin. In: GHEDIN, Evandro; PETERNELLA, Alessandra. (Org.). **Teorias Psicológicas e suas implicações à educação em ciências**. 1 ed. Boa Vista: Editora UFRR, v. 1, p. 355-381, 2016.

DELGADO, O.; MENDOZA, H. J. G.; CASTAÑEDA, A. M. M. Implicação da Base Orientadora das Ações e Direção do Processo de Estudo na Aprendizagem dos Alunos na Atividade de Situações Problema em Sistema de Equações Lineares. **VIII Congresso Norte Nordeste de Educação em Ciência e Matemática**. Universidade Estadual de Roraima. Boa Vista, 2009.

VALENTE, J. A. A espiral da aprendizagem e as tecnologias da informação e comunicação: repensando conceitos. In: JOLY, M.C.R.A. (Ed.). **A tecnologia no ensino: implicações para a aprendizagem**. São Paulo: Casa do Psicólogo Editora, 2002.

VALENTE, J. A. **Espiral da espiral de aprendizagem: o processo de compreensão do papel das tecnologias de informação e comunicação na educação**. Tese (livre docência). Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, Campinas-SP, 2005.

VALENTE, J. A. **Informática na educação: Instrucionismo x Construcionismo**. Disponível em: <http://www.educacaopublica.rj.gov.br/biblioteca/tecnologia/0003.html>. Acesso em: 13 jan. 2019.

VALENTE, J. A. Por que o Computador na Educação? In Valente, J. A. (org.) **Computadores e Conhecimento: Repensando Educação**. São Paulo: Gráfica da UNICAMP, 1993.

ZAMBELLO, A. V. et al. **Metodologia da pesquisa e do trabalho científico**. (Org.) Thiago Mazucato. Penápolis: FUNEPE, 2018.

APÊNDICE A

Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE)

Instituição: Universidade Estadual de Roraima / Mestrado Profissional em Ensino de Ciências

Título: O SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE SEGUNDO GRAU: UMA ALTERNATIVA PARA O DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES POR ATIVIDADE DE SITUAÇÕES PROBLEMA COM ESTUDANTES DO 8º ANO.

Pesquisador: Adjairon da Silva Coelho

Prezado(a) aluno(a), me chamo Adjairon da Silva Coelho, professor e pesquisador. Estou aqui para convidar você, aluno do 8º ano “C” para participar do projeto de pesquisa acima mencionado. Mas, antes precisamos ler e compreender este documento chamado **Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE)**, que vai confirmar que você aceita participar da minha pesquisa. Vamos à leitura do Termo!

Convido você a participar de uma pesquisa voluntária na qual iremos aprender sobre o software GeoGebra e Equações polinomiais de segundo grau. O trabalho de pesquisa visa o seguinte objetivo: Investigar como o software GeoGebra contribui para o desenvolvimento de habilidades de resolver e elaborar problemas por meio da Atividade de Situações Problema sobre equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2=b$ nos estudantes do 8º ano da Escola Estadual Monteiro Lobato.

A pesquisa é importante para você e para professores, pois poderá oportunizar momentos de aprendizagem. Neste projeto você terá a oportunidade de resolver problemas de equações polinomiais de 2º grau nas aulas de matemática com auxílio do software GeoGebra. O GeoGebra é um software de Geometria dinâmica que possibilita criar, arrastar, colorir e visualizar figuras geométricas e realiza cálculos numéricos e algébricos. Além de proporcionar interação entre suas janelas. A Figura 1 a seguir contém as quatro principais janelas que serão utilizadas durante a pesquisa a ser realizada no laboratório de informática da escola.

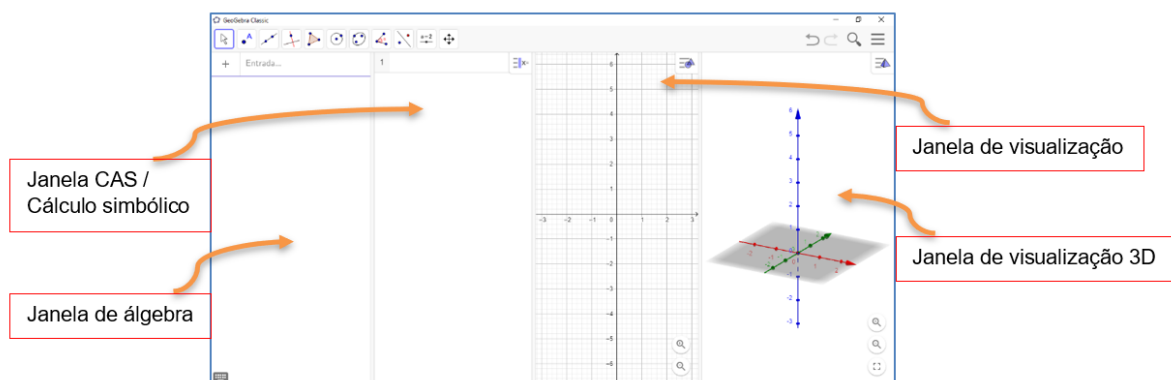


Figura 1: Interface do GeoGebra Classic 6

Solicitamos também seu assentimento, ou seja, sua concordância para realização de registros, feitos a partir de anotações, registros escritos e por fotografia que serão necessários no decorrer do desenvolvimento da pesquisa.

Para tanto, solicitamos a sua colaboração para o desenvolvimento das atividades desta pesquisa, que contemplará observação, aplicação de **uma avaliação diagnóstica com questões objetivas, bem como, a realização de tarefas, as quais serão realizadas através de uma Sequência Didática, que é um planejamento de aulas sequenciais realizadas no software GeoGebra acompanhado de problemas de equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$** a serem disponibilizados em formato digital (PDF) o material didático

elaborado pelo pesquisador. Será observado, também, o desempenho de sua participação, sem nenhuma atribuição de nota ou conceito pelo pesquisador, às tarefas desenvolvidas. A pesquisa é orientada pela Profa. Dra. Solange Mussato.

Esclareço que quaisquer registros feitos durante a pesquisa não serão divulgados, mas o relatório final, contendo citações sem nomes, estará disponível quando estiver concluído o estudo, inclusive para apresentação em encontros científicos e publicação em revistas especializadas. O uso das informações oferecidas pelos alunos será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), sendo o aluno (a) identificado (a) apenas pela inicial de seu nome.

Não haverá benefícios diretos ou imediatos para o participante deste estudo. Este projeto foi aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Estadual de Roraima, sob **parecer nº 3781038** e o Gestor da Escola Estadual Monteiro Lobato está ciente e incentiva a realização da pesquisa.

Apresentamos esta pesquisa aos seus pais ou responsáveis e eles também estão cientes, pois, pedimos seu consentimento. Se você vai participar dessa pesquisa, seus pais ou responsáveis estão de acordo. Para tanto, pedimos que você escreva seu nome completo na linha abaixo.

Este TERMO, **em duas vias**, de modo que uma permanecerá em meu poder e outra com o pesquisador, é para certificar que eu, _____, na qualidade de participante voluntário, aceito participar do projeto científico acima mencionado.

Estou ciente de que a participação na pesquisa poderá me trazer riscos durante as atividades da pesquisa, pois, poderei sentir cansaço ou aborrecimento ao realizar todas as atividades; poderei causar dano material ao laboratório de informática, sofrer choque elétrico ou sentir calor por falta de energia elétrica; poderei me sentir constrangido em não saber utilizar o software GeoGebra ou não conseguir responder as questões propostas nas tarefas realizadas no computador. Mas, para diminuir as chances de que esses fatos ocorram, terei auxílio do pesquisador que ficará responsável por ligar e desligar os computadores, centrais de ar e Datashow, conferindo a incidência de fios desencapados para que, assim, possa isolá-los e, caso ocorra a falta de energia elétrica a aula será cancelada, pois, a pesquisa necessitará exclusivamente dos computadores. Os arquivos serão salvos em pasta no computador, pen drive, bem como em nuvem eletrônica e serão guardados em lugar protegido, para que não ocorra extravio, quebra de sigilo, quebra de anonimato. O pesquisador, também tomará as providências necessárias para proteger o participante de constrangimentos, dando-lhe tempo suficiente para a realização de cada tarefa. O professor da titular da turma acompanhará todas as aulas. Além disso, as tarefas serão realizadas exclusivamente nos computadores do Laboratório de Informática da escola e as tarefas serão desenvolvidas em duplas para que troquem ideias e compartilhem experiências no desenvolvimento delas, poderá haver a rotatividade entre as duplas dando dinamismo e interatividade às aulas.

Estou ciente de que terei direito a medidas de proteção e cautela, com o intuito de evitar possíveis riscos. O pesquisador tomará as providências para garantir a todos os participantes, segurança e proteção, quando sentirem dificuldades em realizar as atividades propostas.

Estou ciente de que sou livre para recusar e retirar meu consentimento, encerrando a minha participação a qualquer tempo, sem penalidades. Garantindo, assim, a minha plena liberdade ao participar da pesquisa, podendo me recusar a participar ou retirar meu consentimento, em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma.

Estou ciente de que não haverá formas de ressarcimento ou de indenização pela minha participação no desenvolvimento da pesquisa, pois as atividades serão realizadas no Laboratório de Informática da escola. Participarei como voluntário da pesquisa se iniciará apenas a partir da entrega desse documento assinado. E, que minha participação não envolve nenhuma forma de incentivo financeiro ou indenização, sendo a única finalidade a contribuição para o desenvolvimento da pesquisa.

Por fim, informo que você terá a oportunidade para perguntar sobre qualquer questão que desejar, e que todas deverão ser respondidas a seu contento.

Assinatura _____ do _____ (a) _____ adolescente:

Data: ____/____/____

Eu Adjairon da Silva Coelho, RG: 309115-5 declaro que serão cumpridas as exigências contidas nos itens IV. 3 da Res. CNS 510/16.

Para esclarecer eventuais dúvidas ou denúncias, entre em contato com o pesquisador no endereço abaixo relacionado:

Pesquisador responsável: Adjairon da Silva Coelho

Endereço completo: Rua José Gomes da Silva, 46, CEP: 69314-470 - Doutor Silvio Botelho, Boa Vista-RR.

Telefone: (95) 98410-8976 e-mail: adjaironrr@hotmail.com

CEP/UERR Rua Sete de Setembro, nº 231 - Bairro Canarinho (sala 201)

Tels.: (95) 2121-0953

Horário de atendimento: Segunda a Sexta das 08 às 12 horas.

APÊNDICE B

Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) em Pesquisas com Seres Humanos

Instituição: Universidade Estadual de Roraima / Mestrado Profissional em Ensino de Ciências

Título: O SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE SEGUNDO GRAU: UMA ALTERNATIVA PARA O DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES POR ATIVIDADE DE SITUAÇÕES PROBLEMA COM ESTUDANTES DO 8º ANO.

Pesquisador: Adjairon da Silva Coelho

Este Termo de Consentimento Livre e Esclarecido tem o propósito de autorizar a participação do (a) menor sob minha responsabilidade no projeto de pesquisa acima mencionado. O objetivo desta pesquisa científica é investigar como o software GeoGebra contribui para o desenvolvimento de habilidades de resolver e elaborar problemas por meio da Atividade de Situações Problema sobre equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$ nos estudantes do 8º ano da Escola Estadual Monteiro Lobato.

A pesquisa é importante para os participantes e para professores, pois, poderá oportunizar momentos de ensino e aprendizagem em matemática. Nesse projeto o aluno terá a oportunidade de resolver problemas de equações polinomiais de 2º grau com auxílio do software GeoGebra. O GeoGebra é um software de Geometria dinâmica que possibilita criar, arrastar, colorir e visualizar figuras geométricas e realiza cálculos numéricos e algébricos. Além de proporcionar interação entre suas janelas. A pesquisa também oportunizará aos participantes, aulas mais dinâmicas, atrativas e autônomas para a promoção do processo de ensino e aprendizagem dos alunos, utilizando a Atividade de Situações Problema como metodologia de ensino. Solicitamos também a autorização para registros feitos a partir de observações, anotações e tarefas que serão arquivadas nos computadores e pen drives. Os registros são necessários para o desenvolvimento da pesquisa.

Quaisquer registros feitos durante a pesquisa não serão divulgados, mas o relatório final, contendo citações anônimas, estará disponível quando estiver concluído o estudo, inclusive para apresentação em encontros científicos e publicação em revistas especializadas. O uso das informações oferecidas pelo (a) aluno (a) será apenas em situações acadêmicas (artigos científicos, palestras, seminários etc.), sendo o aluno (a) identificado (a) pelas letras do alfabeto.

Não haverá benefícios diretos ou imediatos para o participante deste estudo. Este projeto foi aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos da Universidade Estadual de Roraima, sob **parecer nº 3781038** e o Gestor da Escola Estadual Monteiro Lobato, tem conhecimento e incentiva a realização da pesquisa.

Este TERMO, **em duas vias**, é para certificar que o menor sob minha responsabilidade, _____, na qualidade de participante voluntário, está autorizado a participar do projeto científico acima mencionado.

Estou ciente de que a participação na pesquisa do menor sob minha responsabilidade trará riscos durante as atividades da pesquisa, onde ele (a) poderá: sentir cansaço ou aborrecimento ao realizar todas as atividades; causar dano material ao laboratório de informática, sofrer choque elétrico ou sentir calor por falta de energia elétrica; sentir constrangido em não saber utilizar o software GeoGebra ou não conseguir responder as questões propostas nas tarefas realizadas no computador. Mas, para diminuir as chances de que esses fatos ocorram, o participante terá o auxílio do pesquisador que ficará responsável por ligar e desligar os computadores, centrais de ar e Datashow, conferindo a incidência de fios desencapados para que, assim, possa isolá-los e, caso ocorra a falta de energia elétrica

a aula será cancelada, pois, a pesquisa necessitará exclusivamente dos computadores. Os arquivos serão salvos em pasta no computador, pen drive, bem como em nuvem eletrônica e serão guardados em lugar protegido, para que não ocorra extravio, quebra de sigilo, quebra de anonimato. O pesquisador, também tomará as providências necessárias para proteger o participante de constrangimentos, dando-lhe tempo suficiente para a realização de cada tarefa. O professor da titular da turma acompanhará todas as aulas. Além disso, as tarefas serão realizadas exclusivamente nos computadores do Laboratório de Informática da escola e as tarefas serão desenvolvidas em duplas para que troquem ideias e compartilhem experiências no desenvolvimento delas, poderá haver a rotatividade entre as duplas dando dinamismo e interatividade às aulas.

Estou ciente de que o menor sob minha responsabilidade terá direito a medidas de proteção e cautela, com o intuito de evitar possíveis riscos. E, que o pesquisador tomará as providências para garantir a todos os participantes, segurança e proteção, quando sentirem dificuldades em realizar as atividades propostas.

Estou ciente de que sou livre para recusar e retirar meu consentimento, bem como o menor sob minha responsabilidade, encerrando assim a participação dele(a) a qualquer tempo, sem penalidades. Garantindo, assim, a minha plena liberdade ao participar da pesquisa, podendo me recusar a participar ou retirar meu consentimento, em qualquer fase da pesquisa, sem penalização alguma.

Estou ciente de que não haverá formas de ressarcimento ou de indenização pela participação do menor sob minha responsabilidade no desenvolvimento da pesquisa. Pois, o (a) participante não necessitará arcar com gastos em todos os momentos da pesquisa. E, será garantida a indenização para o laboratório de informática (caso haja) diante de eventuais danos decorrentes da pesquisa.

Por fim, sei que terei a oportunidade para perguntar sobre qualquer questão que eu desejar, bem como o menor sob minha responsabilidade e que todas deverão ser respondidas a meu contento.

Assinatura do Autorizante: _____

Data: ____/____/____

Eu Adjairon da Silva Coelho, RG: 309115-5 declaro que serão cumpridas as exigências contidas nos itens IV. 3 da Res. CNS 510/16.

Para esclarecer eventuais dúvidas ou denúncias, entre em contato com o pesquisador no endereço abaixo relacionado:

Pesquisador responsável: Adjairon da Silva Coelho

Endereço completo: Rua José Gomes da Silva, 46, CEP: 69314-470 - Doutor Silvio Botelho, Boa Vista-RR.

Telefone: (95) 98410-8976 e-mail: adjaironrr@hotmail.com

CEP/UERR Rua Sete de Setembro, nº 231 - Bairro Canarinho (sala 201)

Tels.: (95) 2121-0953

Horário de atendimento: Segunda a Sexta das 08 às 12 horas.

APÊNDICE C



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos



CARTA DE ANUÊNCIA PARA AUTORIZAÇÃO DE PESQUISA

Sra. Profa. Marta Simone Cunha Ribeiro

Solicitamos autorização institucional para realização da pesquisa intitulada **O software GeoGebra no ensino de equações polinomiais de segundo grau: uma alternativa para o desenvolvimento de habilidades por atividade de situações problema com estudantes do 8º ano** a ser realizada na Escola Estadual Monteiro Lobato, pelo Prof. Adjairon da Silva Coelho, sob orientação do Profa. Dra. Solange Mussato, com o seguinte objetivo: **Investigar como o software GeoGebra contribui para o desenvolvimento de habilidades de resolver e elaborar problemas por meio da Atividade de Situações Problema sobre equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$** , necessitando portanto, ter acesso aos dados a serem colhidos no laboratório de informática por meio do software GeoGebra, com estudantes do 8º ano C da instituição. Ao mesmo tempo, pedimos autorização para que o nome desta instituição possa constar no relatório final bem como em futuras publicações na forma de artigo científico.

Ressaltamos que os dados coletados serão mantidos em absoluto sigilo de acordo com a Resolução do Conselho Nacional de Saúde (CNS/MS) 510/16 que trata da Pesquisa envolvendo Seres Humanos. Salientamos ainda que tais dados serão utilizados somente para realização deste estudo.

Na certeza de contarmos com a colaboração e empenho desta Diretoria, agradecemos antecipadamente a atenção, ficando à disposição para quaisquer esclarecimentos que se fizerem necessários.

Boa Vista, 14 de Novembro de 2019.

Adjairon da Silva Coelho

Prof. Adjairon da Silva Coelho
Pesquisador Responsável do Projeto

☒ Concordamos com a solicitação

☐ Não concordamos com a solicitação

Marta Simone Cunha Ribeiro

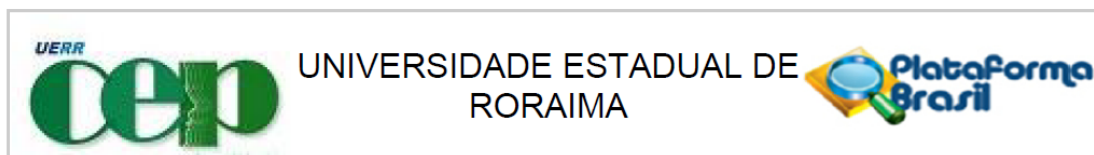
Profa. Marta Simone Cunha Ribeiro
Diretoria da Escola Estadual Monteiro Lobato
(CARIMBO)

Marta Simone Cunha R.
Decreto Nº 315-P de 14/02/20
Coordenadora Pedagógica
E. E. Monteiro Lobato



Comitê de Ética em Pesquisa - CEP
Rua 7 de Setembro, 231/ Sala 201 -
Canarinho
CEP 69306-530 / Boa Vista - RR - Brasil
Fone: (95) 2121-0953
E-mail: cep@uerr.edu.br
www.uerr.edu.br

APÊNDICE D



PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: O SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE SEGUNDO GRAU: UMA ALTERNATIVA PARA O DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES POR ATIVIDADE DE SITUAÇÕES PROBLEMA COM ESTUDANTES

Pesquisador: ADJAIRON DA SILVA COELHO

Área Temática:

Versão: 1

CAAE: 26121219.2.0000.5621

Instituição Proponente: UNIVERSIDADE ESTADUAL DE RORAIMA

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 3.744.251

Apresentação do Projeto:

Com o advento de novas Tecnologias Digitais (TD) voltadas para a educação matemática, busca-se introduzi-las nas aulas visando o ensino e aprendizagem, principalmente, da álgebra e da geometria. Desse modo, com o intuito de constituir um Produto Educacional (PE) a partir desse estudo, composta de teoria e metodologia bem definidas, almeja-se responder a questão: De que forma a utilização do software GeoGebra por meio da Atividade de Situações Problema como metodologia de ensino fundamentada na teoria de formação por etapas das ações mentais de Galperin, possibilita o desenvolvimento da habilidade de resolver e elaborar problemas por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2=b$ nos estudantes do 8º ano da Escola Estadual Monteiro Lobato? O GeoGebra é um software de geometria dinâmica conhecido mundialmente. Há uma comunidade composta de professores e pesquisadores de diversos países que compartilham materiais didáticos. O GeoGebra encontra-se em constante atualização e é utilizado em várias instituições educacionais brasileiras, principalmente, nos Ensinos Médio e Superior.

Realizaremos a análise dos dados a partir da leitura dos dados produzidos, que serão compostos pelas observações e apreciações de: como os estudantes desenvolverão, aplicarão e compreenderão as atividades desenvolvidas no GeoGebra e, também, se realizarão os passos corretamente e dominarão as ferramentas do GeoGebra; as produções dos estudantes por meio do

Endereço: Rua Sete de Setembro, 231 - Sala 201

Bairro: Canarinho

CEP: 69.306-530

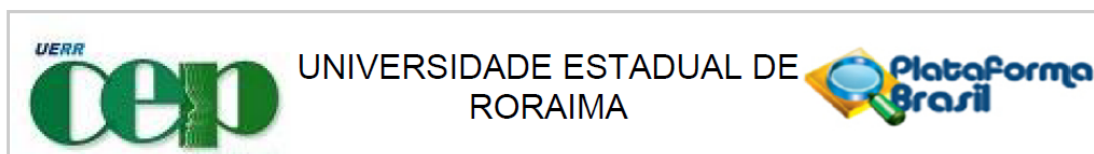
UF: RR

Município: BOA VISTA

Telefone: (95)2121-0953

Fax: (95)2121-0949

E-mail: cep@uerr.edu.br



Continuação do Parecer: 3.744.251

GeoGebra para a compreensão/assimilação da álgebra; assimilação de equações do tipo $ax^2=b$.

Objetivo da Pesquisa:

Objetivo Primário:

Analisar como o software GeoGebra contribui para o desenvolvimento de habilidades de resolver e elaborar problemas por meio da Atividade de Situações Problema como metodologia de ensino fundamentada na teoria de formação por etapas das ações mentais de Galperin sobre equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2=b$ nos estudantes do 8º ano da Escola Estadual Monteiro Lobato.

Objetivo Secundário:

Diagnosticar o nível de partida da Atividade de Situações Problema em equações. Identificar possibilidades de elaboração conceitual por parte dos estudantes no desenvolvimento das habilidades de resolver e elaborar problemas por meio da Atividade de Situações Problema em equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2=b$, no GeoGebra; Identificar as dificuldades dos estudantes quanto a utilização do GeoGebra para resolver equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2=b$;

Analisar a contribuição do Esquema da Base Orientadora Completa da Ação da Atividade de Situações Problema em equações.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

RISCOS:

Consideramos a possibilidade de alguns riscos durante a realização desta pesquisa para os participantes da pesquisa, tais como riscos de origem:

Ambiente: risco de dano material no laboratório de informática, choque elétrico e falta de energia elétrica.

Para tanto, serão adotadas medidas de precaução e proteção a fim de evitar que ocorram os riscos previstos. O pesquisador tomará as providências necessárias para proteger o participante que tiver dificuldade em lidar com o computador e seus periféricos. Estando o pesquisador responsável por ligar e desligar os computadores, centrais de ar e Datashow, conferindo a incidência de fios desencapados para que, assim, possa isolá-los. Caso ocorra a falta de energia elétrica a aula será cancelada, pois, a pesquisa necessitará exclusivamente dos computadores.

Intelectual: possibilidade de constrangimento em não saber utilizar o software GeoGebra e não conseguir responder as questões propostas nas tarefas realizadas no computador. Para que tal constrangimento não ocorra, o pesquisador tomará as providências necessárias para proteger o

Endereço: Rua Sete de Setembro, 231 - Sala 201

Bairro: Canarinho

CEP: 69.306-530

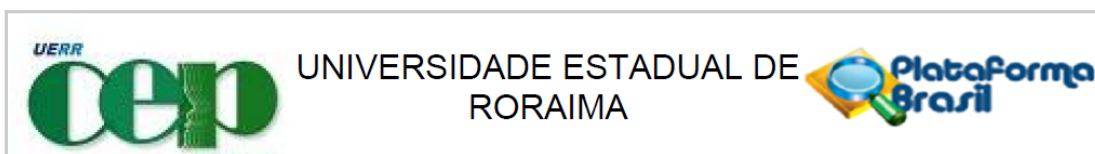
UF: RR

Município: BOA VISTA

Telefone: (95)2121-0953

Fax: (95)2121-0949

E-mail: cep@uerr.edu.br



Continuação do Parecer: 3.744.251

participante que tiver dificuldade em lidar com o software GeoGebra e com os arquivos digitais. Auxiliando-os em todos os processos a serem realizados, mostrando-lhes exemplos de tarefas com o passo a passo. E, os arquivos serão salvos em pasta no computador, pen drive, bem como em nuvem eletrônica e serão guardados em lugar protegido, para que não ocorra extravio, quebra de sigilo, quebra de anonimato. Psicológica/Emocional: cansaço ou aborrecimento para realização das tarefas. Para evitar que ocorra este caso, o pesquisador tomará as providências necessárias para proteger o participante dando-lhe tempo suficiente para a realização de cada tarefa. E, mesmo que o participante não consiga atingir os objetivos de cada aula, o participante poderá salvar o arquivo e continuar nas aulas seguintes.

BENEFÍCIOS:

Os benefícios se resumem ao desenvolvimento da habilidade de resolver e elaborar de equações polinomiais do segundo grau do tipo $ax^2=b$ com uso de tecnologias digitais.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

A pesquisa tem relevância, pois visa contribuir, com situações Problema em equações, além de identificar possibilidades de elaboração conceitual por parte dos estudantes no desenvolvimento das habilidades de resolver e elaborar problemas por meio da Atividade de Situações Problema em equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2=b$, no GeoGebra.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

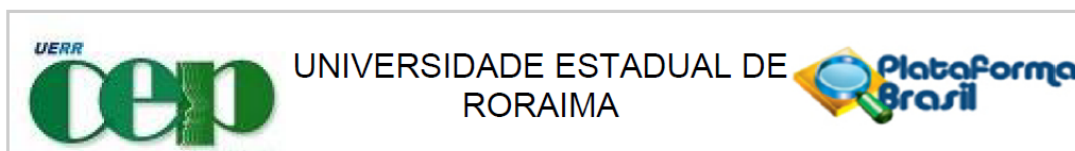
- 1-Carta de Anuência-OK;
- 2-TCLE PARA PAIS BRASILEIROS-OK;
- 3-TALE PARA ALUNOS BRASILEIROS-OK;
- 4-Declaração de compromisso-OK;
- 5-Termo de Confidencialidade-OK;
- 6-TALE E TCLE TRADUZIDOS PARA OS PAIS E ALUNOS ESTRANGEIROS - FALTA;

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

- 1- INFORMAÇÕES BÁSICAS CADASTRADAS NA PLATAFORMA BRASIL E PROJETO DE PESQUISA

1.1- Nos documentos intitulados: PB PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1464932.pdf e PROJETO_DE_PESQUISA_ADJAIRON.pdf, postados no dia 21.11.2019, o pesquisador afirma em seus critérios de inclusão: "Alunos estrangeiros, nacionalizados e brasileiros que apresentarem o Termo

Endereço: Rua Sete de Setembro, 231 - Sala 201
Bairro: Canarinho **CEP:** 69.306-530
UF: RR **Município:** BOA VISTA
Telefone: (95)2121-0953 **Fax:** (95)2121-0949 **E-mail:** cep@uerr.edu.br



Continuação do Parecer: 3.744.251

de Consentimento Livre Esclarecido (TCLE) autorizativo (APÊNDICE B), que deve ser assinado pelos pais ou responsáveis, para que os alunos participem da pesquisa e o Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) (APÊNDICE A) assinado pelo aluno".

SOLICITA-SE:

- Informar a este comitê a nacionalidade dos alunos participantes; e
- Apresentar os documentos: TCLE AUTORIZATIVO e TALE traduzidos na linguagem materna dos participantes (aos pais e alunos) estrangeiros.

O (a) pesquisador (a) de acordo com item 2.2, inciso 2, letra "E" da Norma Operacional nº 001 de 2013 do CNS, as pendências devem ser respondidas exclusivamente pelo pesquisador responsável no prazo de 30 dias, a partir da data de envio deste parecer. Após esse prazo, o protocolo será arquivado;

Considerações Finais a critério do CEP:

Diante do exposto, o CEP/UERR, de acordo com as atribuições definidas na Resolução CNS nº 510 de 2016, na Resolução CNS nº 466 de 2012 e na Norma Operacional nº 001 de 2013 do CNS, manifesta-se por aguardar o atendimento às questões acima para emissão de seu parecer final.

Situação: Protocolo pendente

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1464932.pdf	21/11/2019 11:24:45		Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	PROJETO_DE_PESQUISA_ADJAIRON.pdf	21/11/2019 11:23:53	ADJAIRON DA SILVA COELHO	Aceito
Outros	TERMO_DE_CONFIDENCIALIDADE_ADJAIRON.pdf	21/11/2019 11:20:25	ADJAIRON DA SILVA COELHO	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	CARTA_DE_ANUENCIA_ADJAIRON.pdf	21/11/2019 11:06:31	ADJAIRON DA SILVA COELHO	Aceito
Outros	CRITERIOS_EXCLUSAO_INCLUSAO_	21/11/2019	ADJAIRON DA	Aceito

Endereço: Rua Sete de Setembro, 231 - Sala 201

Bairro: Canarinho

CEP: 69.306-530

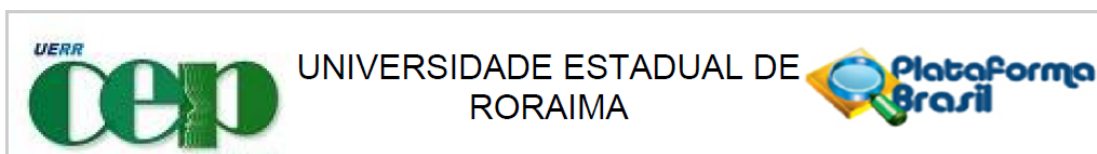
UF: RR

Município: BOA VISTA

Telefone: (95)2121-0953

Fax: (95)2121-0949

E-mail: cep@uerr.edu.br



Continuação do Parecer: 3.744.251

Outros	JAIRON.pdf	11:03:29	COELHO	Aceito
Outros	DECLARACAO_COMPROMISSO_ADJAIRON.pdf	21/11/2019 11:02:35	ADJAIRON DA SILVA COELHO	Aceito
Outros	TALE_ADJAIRON.pdf	21/11/2019 11:01:20	ADJAIRON DA SILVA COELHO	Aceito
Folha de Rosto	FOLHA_DE_ROSTO_ADJAIRON.pdf	21/11/2019 10:58:43	ADJAIRON DA SILVA COELHO	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE_ADJAIRON.pdf	21/11/2019 10:58:21	ADJAIRON DA SILVA COELHO	Aceito
Orçamento	CUSTOS_FINANCIAMENTO_ADJAIRON.pdf	21/11/2019 10:57:23	ADJAIRON DA SILVA COELHO	Aceito
Cronograma	CRONOGRAMA_ADJAIRON.pdf	21/11/2019 10:56:58	ADJAIRON DA SILVA COELHO	Aceito

Situação do Parecer:

Pendente

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

BOA VISTA, 04 de Dezembro de 2019

Assinado por:
Márcia Teixeira Falcão
(Coordenador(a))

Endereço: Rua Sete de Setembro, 231 - Sala 201

Bairro: Canarinho

CEP: 69.306-530

UF: RR

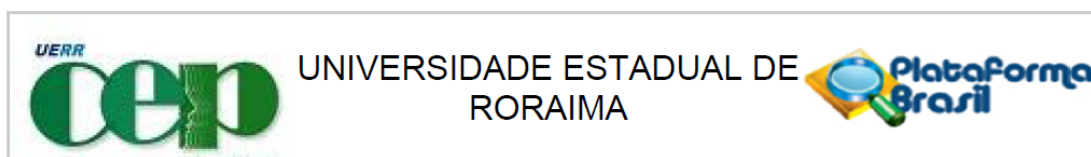
Município: BOA VISTA

Telefone: (95)2121-0953

Fax: (95)2121-0949

E-mail: cep@uerr.edu.br

APÊNDICE E



PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: O SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE SEGUNDO GRAU: UMA ALTERNATIVA PARA O DESENVOLVIMENTO DE HABILIDADES POR ATIVIDADE DE SITUAÇÕES PROBLEMA COM ESTUDANTES

Pesquisador: ADJAIRON DA SILVA COELHO

Área Temática:

Versão: 2

CAAE: 26121219.2.0000.5621

Instituição Proponente: UNIVERSIDADE ESTADUAL DE RORAIMA

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 3.781.038

Apresentação do Projeto:

Com o advento de novas Tecnologias Digitais (TD) voltadas para a educação matemática, busca-se introduzi-las nas aulas visando o ensino e aprendizagem, principalmente, da álgebra e da geometria. Desse modo, com o intuito de constituir um Produto Educacional (PE) a partir desse estudo, composta de teoria e metodologia bem definidas, almeja-se responder a questão: De que forma a utilização do software GeoGebra por meio da Atividade de Situações Problema como metodologia de ensino fundamentada na teoria de formação por etapas das ações mentais de Galperin, possibilita o desenvolvimento da habilidade de resolver e elaborar problemas por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2=b$ nos estudantes do 8º ano da Escola Estadual Monteiro Lobato? O GeoGebra é um software de geometria dinâmica conhecido mundialmente. Há uma comunidade composta de professores e pesquisadores de diversos países que compartilham materiais didáticos. O GeoGebra encontra-se em constante atualização e é utilizado em várias instituições educacionais brasileiras, principalmente, nos Ensinos Médio e Superior. Realizaremos a análise dos dados a partir da leitura dos dados produzidos, que serão compostos pelas observações e apreciações de: como os estudantes desenvolverão, aplicarão e compreenderão as atividades desenvolvidas no GeoGebra e, também, se realizarão os passos corretamente e dominarão as ferramentas do GeoGebra; as produções dos estudantes por meio do GeoGebra para a compreensão/assimilação da álgebra; assimilação de equações do tipo $ax^2=b$.

Endereço: Rua Sete de Setembro, 231 - Sala 201

Bairro: Canarinho

CEP: 69.306-530

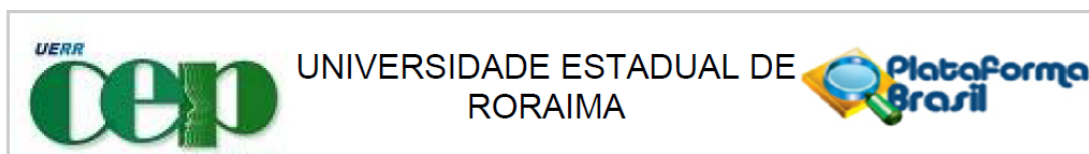
UF: RR

Município: BOA VISTA

Telefone: (95)2121-0953

Fax: (95)2121-0949

E-mail: cep@uerr.edu.br



Continuação do Parecer: 3.781.038

Objetivo da Pesquisa:

Objetivo Primário:

Analisar como o software GeoGebra contribui para o desenvolvimento de habilidades de resolver e elaborar problemas por meio da Atividade de Situações Problema como metodologia de ensino fundamentada na teoria de formação por etapas das ações mentais de Galperin sobre equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2=b$ nos estudantes do 8º ano da Escola Estadual Monteiro Lobato.

Objetivo Secundário:

Diagnosticar o nível de partida da Atividade de Situações Problema em equações. Identificar possibilidades de elaboração conceitual por parte dos estudantes no desenvolvimento das habilidades de resolver e elaborar problemas por meio da Atividade de Situações Problema em equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2=b$, no GeoGebra; Identificar as dificuldades dos estudantes quanto a utilização do GeoGebra para resolver equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2=b$;

Analisar a contribuição do Esquema da Base Orientadora Completa da Ação da Atividade de Situações Problema em equações.

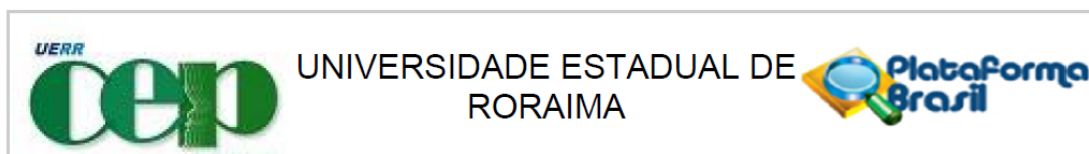
Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Intelectual: possibilidade de constrangimento em não saber utilizar o software GeoGebra e não conseguir responder as questões propostas nas tarefas realizadas no computador. Para que tal constrangimento não ocorra, o pesquisador tomará as providências necessárias para proteger o participante que tiver dificuldade em lidar com o software GeoGebra e com os arquivos digitais. Auxiliando-os em todos os processos a serem realizados, mostrando-lhes exemplos de tarefas com o passo a passo. E, os arquivos serão salvos em pasta no computador, pen drive, bem como em nuvem eletrônica e serão guardados em lugar protegido, para que não ocorra extravio, quebra de sigilo, quebra de anonimato.

Psicológica/Emocional: cansaço ou aborrecimento para realização das tarefas. Para evitar que ocorra este caso, o pesquisador tomará as providências necessárias para proteger o participante dando-lhe tempo suficiente para a realização de cada tarefa. E, mesmo que o participante não consiga atingir os objetivos de cada aula, o participante poderá salvar o arquivo e continuar nas aulas seguintes.

BENEFÍCIOS:

Endereço: Rua Sete de Setembro, 231 - Sala 201
Bairro: Canarinho **CEP:** 69.306-530
UF: RR **Município:** BOA VISTA
Telefone: (95)2121-0953 **Fax:** (95)2121-0949 **E-mail:** cep@uerr.edu.br



Continuação do Parecer: 3.781.038

Os benefícios se resumem ao desenvolvimento da habilidade de resolver e elaborar de equações polinomiais do segundo grau do tipo $ax^2=b$ com uso de tecnologias digitais.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

A pesquisa tem relevância, pois visa contribuir, com situações Problema em equações, além de identificar possibilidades de elaboração conceitual por parte dos estudantes no desenvolvimento das habilidades de resolver e elaborar problemas por meio da Atividade de Situações Problema em equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2=b$, no GeoGebra.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

- 1-Carta de Anuência-ok;
- 2-TCLE para pais brasileiros-ok;
- 3-TALE para alunos brasileiros-ok;
- 4-Declaração de compromisso-ok;
- 5-termo de confidencialidade-ok;
- 6-TALE e TCLE traduzidos para os pais e alunos estrangeiros-ok;

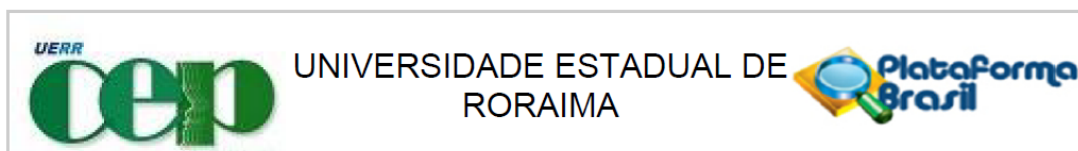
Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Projeto de pesquisa sem óbice ético.

Considerações Finais a critério do CEP:

- 1- Diante do exposto, o CEP/UERR, de acordo com as atribuições definidas na Resolução CNS nº510 de 2016, na Resolução CNS nº 466 de 2012 e na Norma Operacional nº 001 de 2013 do CNS, manifesta-se pela aprovação do projeto de pesquisa proposto.
- 2- O(a) pesquisador(a) deverá desenvolver o projeto de pesquisa aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Estadual de Roraima ficando responsável por qualquer alteração que realizar, sem a devida autorização do CEP/UERR, que venha a causar danos ao participante pesquisado. Caso haja a necessidade de alteração, o(a) pesquisador(a) compromete-se a enviar emenda ao projeto seguindo os tramites da Plataforma Brasil para análise e consequente aprovação.
- 3- O(a) pesquisador(a) deverá anexar os resultados por meio de relatório via Plataforma Brasil, com isto garantindo o sigilo relativo às propriedades intelectuais e patentes industriais em conformidade com o que diz a Norma Operacional nº 001/2013 do Conselho Nacional de Saúde

Endereço: Rua Sete de Setembro, 231 - Sala 201
Bairro: Canarinho **CEP:** 69.306-530
UF: RR **Município:** BOA VISTA
Telefone: (95)2121-0953 **Fax:** (95)2121-0949 **E-mail:** cep@uerr.edu.br



Continuação do Parecer: 3.781.038

no item 3, inciso 3.3, alínea "c".

4- Devido a solicitação de parecer ad referendum a coordenadora verificado o saneamento das pendências descritas nos pareceres pendente nº 3.744.251 de 04/12/2019 emitido pela CEP/UERR aprova o projeto.

Situação: Protocolo aprovado.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1464932.pdf	09/12/2019 17:53:15		Aceito
Outros	TALE_TRADUZIDO_ADJAIRON.pdf	09/12/2019 17:52:34	ADJAIRON DA SILVA COELHO	Aceito
Outros	TCLE_AUTORIZATIVO_TRADUZIDO_ADJAIRON.pdf	09/12/2019 17:36:25	ADJAIRON DA SILVA COELHO	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	PROJETO_DE_PESQUISA_ADJAIRON.pdf	21/11/2019 11:23:53	ADJAIRON DA SILVA COELHO	Aceito
Outros	TERMO_DE_CONFIDENCIALIDADE_ADJAIRON.pdf	21/11/2019 11:20:25	ADJAIRON DA SILVA COELHO	Aceito
Declaração de Instituição e Infraestrutura	CARTA_DE_ANUENCIA_ADJAIRON.pdf	21/11/2019 11:06:31	ADJAIRON DA SILVA COELHO	Aceito
Outros	CRITERIOS_EXCLUSAO_INCLUSAO_ADJAIRON.pdf	21/11/2019 11:03:29	ADJAIRON DA SILVA COELHO	Aceito
Outros	DECLARACAO_COMPROMISSO_ADJAIRON.pdf	21/11/2019 11:02:35	ADJAIRON DA SILVA COELHO	Aceito
Outros	TALE_ADJAIRON.pdf	21/11/2019 11:01:20	ADJAIRON DA SILVA COELHO	Aceito
Folha de Rosto	FOLHA_DE_ROSTO_ADJAIRON.pdf	21/11/2019 10:58:43	ADJAIRON DA SILVA COELHO	Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	TCLE_ADJAIRON.pdf	21/11/2019 10:58:21	ADJAIRON DA SILVA COELHO	Aceito
Orçamento	CUSTOS_FINANCIAMENTO_ADJAIRON.pdf	21/11/2019 10:57:23	ADJAIRON DA SILVA COELHO	Aceito
Cronograma	CRONOGRAMA_ADJAIRON.pdf	21/11/2019 10:56:58	ADJAIRON DA SILVA COELHO	Aceito

Endereço: Rua Sete de Setembro, 231 - Sala 201

Bairro: Canarinho

CEP: 69.306-530

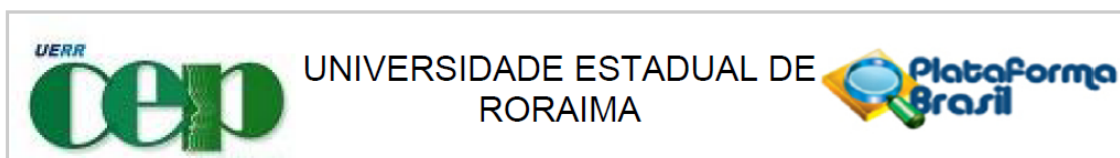
UF: RR

Município: BOA VISTA

Telefone: (95)2121-0953

Fax: (95)2121-0949

E-mail: cep@uerr.edu.br



Continuação do Parecer: 3.781.038

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

BOA VISTA, 18 de Dezembro de 2019

Assinado por:
Márcia Teixeira Falcão
(Coordenador(a))

Endereço: Rua Sete de Setembro, 231 - Sala 201
Bairro: Canarinho **CEP:** 69.306-530
UF: RR **Município:** BOA VISTA
Telefone: (95)2121-0953 **Fax:** (95)2121-0949 **E-mail:** cep@uerr.edu.br